Chapitre ③ : Les puissances

I – Puissance d'un nombre réel :

1°) Définition :

a un nombre réel et n un entier naturel non nul

$$a^n = \underbrace{a\times a\times a\times \dots \times a}_{n \text{ fois}} \qquad a^0 = 1$$

puissance n de a → a^n ← exposant ; base

$a^1 = a$

*** Remarques et cas particuliers**

→ a^n se lit : a puissance n ou a exposant n

→ $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$ et $a^1 = a$

→ $0^n = 0$ (avec $n \neq 0$) et $1^n = 1$

→ $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

*** Exemples :**

* $2005^0 = 1$ * $2007^1 = 2007$

* $3^4 = 3\times3\times3\times3 = 81$

* $\sqrt{2}^3 = \sqrt2\times\sqrt2\times\sqrt2 = 2\sqrt2$

* $0^{2020} = 0$

* $(-7)^3 = (-7)\times(-7)\times(-7) = -343$

* $(-\sqrt2)^4 = (-\sqrt2)\times(-\sqrt2)\times(-\sqrt2)\times(-\sqrt2) = 4$

2) Le signe d'une puissance :

a – Propo :

a un nombre réel, n entier naturel non nul.

Le signe de la puissance a^n

- Si $a > 0$ → a^n positif
- Si $a < 0$
  - n pair → a^n positive
  - n impair → a^n négatif

b – Exemples :

* $\sqrt7^3 > 0$ car la base $\sqrt7$ positif

* $(-\sqrt{11})^{124} > 0$ car l'exposant 124 positif

* $\left(-\frac{\sqrt3}{7}\right)^{11} < 0$ car la base $-\frac{\sqrt3}{7}$ négatif et l'exposant 11 impaire

* $-\sqrt5^{12} < 0$ car la base est $\sqrt5$ pas $-\sqrt5$

c – Remarque importante :

a un nombre réel non nul, n entier naturel

* Si n est paire alors : $(-a)^n = a^n$

* Si n est impaire alors : $(-a)^n = -a^n$

*** Exercice d'application :**

Calculer :

$a = (-4)^3$ $\quad b = -2^4$ $\quad c = -\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

$d = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3$ $\quad e = -(-\sqrt5)^2$ $\quad f = \left(-\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2$

Solution :

$a = (-4)^3 = -4^3 = -64$

$b = -2^4 = -16$

$c = -\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = --\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$d = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{16}{25} - \frac{1}{8}$

$= \frac{128 - 25}{200} = \frac{103}{200}$

$e = -(-\sqrt5)^2 = -(\sqrt5)^2 = -5$

$f = \left(-\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2 = \sqrt{\sqrt{16}}^2 = \sqrt{16} = 4$

3) Puissance à exposant négatif :

a – Définition :

Soient a et b deux nombres réels non nuls et n un nombre entier naturel.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

b – Exemples :

* $\sqrt2^{-1} = \frac{1}{\sqrt2^1} = \frac{1}{\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{2}$

* $\left(\frac{-3}{\sqrt5}\right)^{-2} = \left(-\frac{\sqrt5}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

* $(3+\sqrt2)^{-1} = \frac{1}{3+\sqrt2} = \frac{3-\sqrt2}{(3+\sqrt2)(3-\sqrt2)}$

$= \frac{3-\sqrt2}{3^2-\sqrt2^2} = \frac{3-\sqrt2}{9-2} = \frac{3-\sqrt2}{7}$

Rédigé par: Mr BENNASSER Jamal

II- Les opérations sur les puissances:

1) Activité:

1) Ecrire les nombres suivants sous forme d'une puissance du nombre 2

$A = 2^5 \times 2^3$

$B = 16^5 \qquad C = 8^3 \times 4^{32}$

2°/ Ecrire le nombre suivant sous forme $2^n \times 3^p$ avec n, p deux nombres entiers relatifs

$D = \dfrac{8^2 \times 9^3}{3^5 \times 2^4}$

Solution:

1°) $A = 2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

$B = 16^5 = (2^4)^5 = 2^{4\times5} = 2^{20}$

$C = 8^3 \times 4^{32} = (2^3)^3 \times (2^2)^{32}$
$= 2^{3\times3} \times 2^{2\times32} = 2^9 \times 2^{64}$
$= 2^{9+64} = 2^{73}$

2°) $D = \dfrac{8^2 \times 9^3}{3^5 \times 2^4} = \dfrac{(2^3)^2 \times (3^2)^3}{3^5 \times 2^4} = \dfrac{2^6 \times 3^6}{3^5 \times 2^4}$
$= 2^{6-4} \times 3^{6-5} = 2^2 \times 3^1$

2°) Propriétés:

a, b deux nombres réels non nuls, n et m deux nombres entiers relatifs

$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad a^n \times b^n = (a\times b)^n$

$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

$(a^n)^m = a^{n\times m}$

Remarque:

→ Si on a même base, on garde la base

→ Si on a même exposant, on garde l'exposant.

3°) Exemples:

$a = \sqrt{5}^3 \times \sqrt{5}^{-7} = \sqrt{5}^{3+(-7)} = \sqrt{5}^{-4} = \dfrac{1}{\sqrt{5}^4} = \dfrac{1}{5^2}$
$= \dfrac{1}{25}$

$b = \sqrt{2}^3 \times \sqrt{2}^{-2} \times \sqrt{2}^{-1} = \sqrt{2}^{3-2-1} = \sqrt{2}^0 = 1$

$c = \dfrac{5^8}{5^{11}} = 5^{8-11} = 5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$

$d = \dfrac{\sqrt{7}^3}{\sqrt{7}^{-2}} = \sqrt{7}^{3-(-2)} = \sqrt{7}^{3+2} = \sqrt{7}^5$
$= \sqrt{7}^4 \times \sqrt{7} = (\sqrt{7}^2)^2 \times \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$

$e = (\sqrt{7}^2)^{-3} = \sqrt{7}^{2\times-3} = \sqrt{7}^{-6} = \dfrac{1}{\sqrt{7}^6}$
$= \dfrac{1}{(\sqrt{7}^2)^3} = \dfrac{1}{7^3} = \dfrac{1}{343}$

$f = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}^4\right)^2 = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}^2\right)^4 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{3^4}{2^4} = \dfrac{81}{16}$

$g = \sqrt{5}^3 \times \sqrt{7}^3 = (\sqrt{5}\times\sqrt{7})^3 = \sqrt{35}^3$
$= \sqrt{35}^2 \times \sqrt{35} = 35\sqrt{35}$

$h = 3^{-2} \times \sqrt{3}^{-2} \times \sqrt{2}^{-2} = (3\times\sqrt{3}\times\sqrt{2})^{-2}$
$= (3\sqrt{6})^{-2} = \dfrac{1}{(3\sqrt{6})^2} = \dfrac{1}{9\times6} = \dfrac{1}{54}$

$i = \dfrac{\sqrt{45}^3}{\sqrt{5}^3} = \left(\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}\right)^3 = \sqrt{\dfrac{45}{5}}^3 = \sqrt{9}^3 = 3^3 = 27$

$j = \dfrac{25^{-2}}{15^{-2}} = \left(\dfrac{25}{15}\right)^{-2} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2} = \dfrac{9}{25}$

4°/ Exercice d'application

a et b deux nombres réels non nuls et $a \neq 3$

Simplifier ce qui suit.

$A = \dfrac{a^2 \times (a^5)^3}{(a\times a^2)^4} \qquad B = \dfrac{a^{-5} \times b^{-3} \times a^{-2}}{a^3 \times (b^{-2})^3}$

$C = \left[1 + \left(\dfrac{3-a}{1+a}\right)^{-1}\right]^{-1}$

Solution:

$A = \dfrac{a^2 \times (a^5)^3}{(a\times a^2)^4} = \dfrac{a^2 \times a^{5\times3}}{(a^{1+2})^4} = \dfrac{a^2 \times a^{15}}{(a^3)^4}$
$= \dfrac{a^{2+15}}{a^{3\times4}} = \dfrac{a^{17}}{a^{12}} = a^{17-12} = a^5$

$B = \dfrac{a^{-5} \times b^{-3} \times a^{-2}}{a^3 \times (b^{-2})^3} = \dfrac{a^{-5+(-2)} \times b^{-3}}{a^3 \times b^{-2\times3}}$
$= \dfrac{a^{-7} \times b^{-3}}{a^3 \times b^{-6}} = a^{-7-3} \times b^{-3+6}$
$= a^{-10} \times b^3$

$C = \left[1 + \left(\dfrac{3-a}{1+a}\right)^{-1}\right]^{-1}$
$= \left[1 + \dfrac{1+a}{3-a}\right]^{-1} = \left(\dfrac{3-a+1+a}{3-a}\right)^{-1}$
$= \left(\dfrac{4}{3-a}\right)^{-1} = \left(\dfrac{3-a}{4}\right)^1 = \dfrac{3-a}{4}$

III – L'écriture scientifique

1°) Puissances de 10

a – Propriété

n un entier naturel

$$10^n = 1\underbrace{00\ldots00}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0{,}00\ldots00}_{n \text{ zéros}}1$$

b – Exemples

* $10^4 = 10\,000$ * $10^7 = 10\,000\,000$
* $10^{-1} = 0{,}1$ * $10^{-2} = 0{,}01$
* $10^{-3} = 0{,}001$ * $10^{-5} = 0{,}00001$

2) Écriture scientifique

a – Définition

Soient a un nombre décimal et n un entier relatif.
L'écriture $x = a \times 10^n$ ou $x = -a \times 10^n$ s'appelle écriture scientifique de x avec
$1 \leq a < 10$

b – Exemples

$a = 3452 = 3{,}452 \times 10^3$

$b = 0{,}00000234 = 2{,}34 \times 10^{-6}$

$c = 678{,}25 \times 10^5$
$= 6{,}7825 \times 10^2 \times 10^5$
$= 6{,}7825 \times 10^{2+5} = 6{,}7825 \times 10^7$

$d = -0{,}000981 \times 10^{-9}$
$= -9{,}81 \times 10^{-4} \times 10^{-9}$
$= -9{,}81 \times 10^{-4-9} = -9{,}81 \times 10^{-13}$

$e = -24{,}5 \times 10^{-11} \times 1{,}2 \times 10^3$
$= -24{,}5 \times 1{,}2 \times 10^{-11} \times 10^3$
$= -29{,}4 \times 10^{-11+3}$
$= -2{,}94 \times 10 \times 10^{-8}$
$= -2{,}94 \times 10^{-7}$

$f = \dfrac{25{,}5 \times 10^{-16}}{0{,}05 \times 10^3} = \dfrac{25{,}5}{0{,}05} \times 10^{-16-3}$
$= 510 \times 10^{-19}$
$= 5{,}1 \times 10^2 \times 10^{-19}$
$= 5{,}1 \times 10^{-17}$

$g = -113 \times 10^5 + 7{,}2 \times 10^7$
$= -113 \times 10^5 + 7{,}2 \times 10^2 \times 10^5$
$= -113 \times 10^5 + 720 \times 10^5$
$= (-113 + 720) \times 10^5$
$= 607 \times 10^5$
$= 6{,}07 \times 10^2 \times 10^5$
$= 6{,}07 \times 10^7$

Méthode : Pour trouver l'écriture scientifique d'un nombre réel, on glisse la virgule jusqu'on trouve un nombre entre 1 et 10,

→ glissement à droite = exposant négatif

→ glissement à gauche = exposant positif