Chapitre ⑥ : Fonction linéaire et fonction affine

I – fonction linéaire :

1) Définition :

Soit a un nombre réel donné
Toute relation f qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel ax s'appelle fonction linéaire de coefficient a et on écrit : $f(x) = ax$
On dit que ax est l'image de x par la fonction f.

2) Exemples :

∗ Exemple ① :

f, g et h sont des fonctions linéaires définies par : $f(x) = \frac{1}{3}x$, $g(x) = 0x$, $h(x) = -\sqrt{5}x$

→ f fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{3}$
→ g fonction linéaire de coefficient 0
→ h fonction linéaire de coefficient $-\sqrt{5}$

∗ Exemple ② :

f fonction linéaire définie par : $f(x) = 2x$
1) Calculer $f(0)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{3})$
2) Calculer l'image de 3 par f (càd $f(3)$)
3) Calculer le nombre d'image -8 par la fonction f

Solution :

1)
∗ $f(0) = 2\times 0 = 0$
∗ $f(-1) = 2\times(-1) = -2$
∗ $f(\sqrt{3}) = 2\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

2) On a $f(3) = 2\times 3 = 6$
donc l'image de 3 par la fonction f est 6

3) Résolvons l'équation $f(x) = -8$
l'équation $f(x) = -8$ est respectivement équivalente à

$2x = -8$

$x = \frac{-8}{2} = -4$

donc : $f(-4) = -8$

Donc le nombre d'image -8 par f est -4

3) Propriété : Coefficient d'une fonction linéaire

a – propo ① :

Si f est fonction linéaire et x un nombre réel non nul, donc ;
Le coefficient de la fonction f est :

$$\boxed{a = \frac{f(x)}{x}}$$

b – Exemple :

On considère la fonction linéaire telque : $f(2) = 6$
Déterminons l'expression de la fonction f
∗ On a f fonction linéaire donc $f(x) = ax$
et son coefficient est : $a = \frac{f(2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$
D'où : $f(x) = 3x$

4) Représentation graphique d'une fonction linéaire :

a – propo ② :

(O, I, J) un repère orthonormé
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère O.

b – Exemple :

g est une fonction linéaire définie par :
$g(x) = \frac{-2}{3}x$
1) Calculer $g(3)$
2) Construire la représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé (O, I, J)

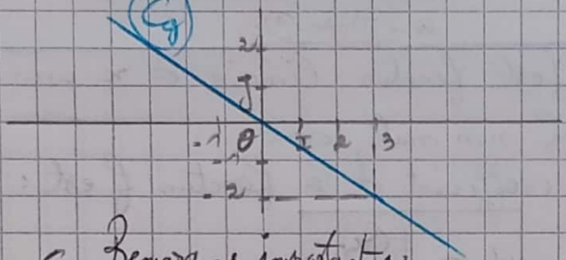
Solution :

1) On a : $g(x) = \frac{-2}{3}x$

donc $g(3) = \frac{-2}{3} \times 3 = -2$

2) On a $g(3) = -2$ et g linéaire

donc la représentation graphique de la fonction g est une droite qui passe par les points $O(0;0)$ et $A(3;-2)$



c – Remarques importantes :

1) Le point $M(x;y)$ appartient à la représentation graphique d'une fonction linéaire f signifie que : $f(x) = y$

2) Pour déterminer l'image d'un nombre b par une fonction linéaire f graphiquement, On construit la droite verticale passante par b qui coupe (C_f) la représentation graphique de la fonction f en un point d'~~coordonnée~~ ordonnée c

donc : $f(b) = c$

3) Pour déterminer le nombre d'image c par une fonction linéaire f graphiquement, on construit la droite horizontale passante par c qui coupe (C_f) en un point d'abscisse c donc $f(c) = b$

4) $f(x) = ax$ fonction linéaire, donc l'équation de la droite (Δ) la représentation graphique de la fonction f est : $(\Delta) : y = ax$

5) Exercice d'application :

f est une fonction linéaire définie par :

$f(x) = -2x$

1) Est-ce que les points $A(-1;5)$ et $B(3;-6)$ appartiennent à (C_f)

2) Tracer (C_f)

Solution :

1) * On a $f(-1) = -2 \times -1 = 2 \neq 5$

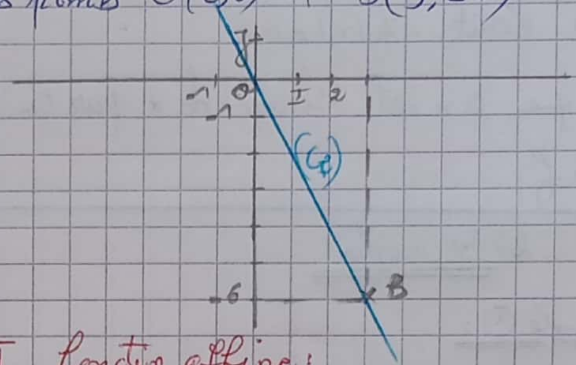
donc $A \notin (C_f)$

* On a $f(3) = -2 \times 3 = -6$

donc $B \in (C_f)$

2) f est une fonction linéaire et $B \in (C_f)$

donc (C_f) est une droite qui passe par les points $O(0;0)$ et $B(3;-6)$



II – fonction affine :

1) Définition :

Soient a et b deux nombres réels donnés.

Toute relation f qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel $ax + b$ s'appelle fonction affine de coefficient a et on écrit : $f(x) = ax + b$

* Le nombre $ax + b$ s'appelle l'image de x par la fonction f.

2) Exemples :

* Exemple ① :

$f(x) = x - 3$ et $g(x) = 5$ et $h(x) = -\frac{3}{2}x + 1$

→ f fonction affine de coefficient 1

→ g fonction affine de coefficient 0

→ h fonction affine de coefficient $-\frac{3}{2}$

* Exemple ② :

g fonction affine telque : $g(x) = 2x - 4$

1) Calculer $g(0)$ et $g(1)$

2) Calculer l'image de 2 par la fonction g

3) Déterminer le nombre d'image 6 par la fonction g.

Solution:

1) On a: $g(0) = 2\times0-4 = -4$

$g(1) = 2\times1-4 = 2-4 = -2$

2) On a $g(2) = 2\times2-4 = 4-4 = 0$

3) Résolvons l'équation $g(x) = 6$

l'équation $g(x)=6$ est respectivement équivalente à

$2x-4=6$

$2x=6+4$

$2x=10$

$x=\frac{10}{2}=5$

Alors: $g(5)=6$

le nombre d'image 6 par la fonction g est 5

3) Propriété: Coefficient de la fonction affine.

a- propo ③:

Si f est une fonction affine et $x \neq x'$

le coefficient de la fonction f est:

$$\boxed{a=\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}}$$

b- Exemple:

f est une fonction affine telque:

$f(0)=3$ et $f(1)=5$

Déterminons l'expression de la fonction f

* On a f est une fonction affine

donc $f(x)=ax+b$

son coefficient est $a=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{5-3}{1}=2$

donc $f(x)=2x+b$

Déterminons b

On a: $f(0)=3$ donc: $2\times0+b=3$

$b=3$

Alors: $\boxed{f(x)=2x+3}$

4) Représentation graphique d'une fonction affine:

a- propo ④:

(O, I, J) un repère orthonormé.

la représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui passe par les points $A(x; f(x))$ et $B(x'; f(x'))$

b- Exemple:

On considère la fonction affine: $f(x)=2x+4$

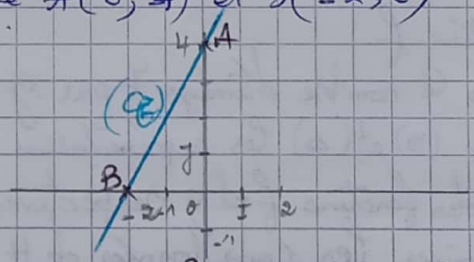
Traçons dans un repère orthonormé (O, I, J) (C_f) la représentation graphique de la fonction f

On a: $f(0) = 2\times0+4 = 4$

$f(-2) = 2\times(-2)+4 = -4+4 = 0$

(C_f) la représentation graphique de la fonction f est la droite (AB) telque $A(0;4)$ et $B(-2;0)$

x	0	-2
$f(x)$	4	0



c- Remarques importantes:

1) Le point $M(x;y)$ appartient à la représentation graphique de la fonction affine f signifie que: $f(x)=y$

2) Les méthodes graphiques pour déterminer les images et les nombres dont on connaît leurs images restent valables pour une fonction affine

3) $f(x)=ax+b$ fonction affine donc $f(0)=b$ et l'équation de la droite (Δ) représentation graphique de f est: $(\Delta): y=ax+b$

4) * Intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses $\Rightarrow$ On résoud l'équation $f(x)=0$

$\Rightarrow A(x;0)$

* Intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées

$\Rightarrow$ On calcule $f(0)$

$\Rightarrow B(0;f(0))$

5) La fonction $f(x)=a$ est une fonction affine de coefficient 0 (ou fonction constante) et sa représentation graphique est la droite passante par le point $A(0,a)$ et parallèle à l'axe des abscisses.

* **Exercice d'application :**

f et g deux fonctions telque :

$f(x)=ax$ et $g(x)=2x+b$

1) Déterminer a et b telque :

$f(-1)=3$ et $g(0)=5$

2) Calculer $f(2)$ et $g(-1)$

3) Déterminer le nombre d'image -4 par la fonction f

4) Déterminer le nombre d'image 7 par g

5) Tracer (D) et (Δ) les représentations graphiques des fonctions f et g respectivement.

6) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de (D) et (Δ) graphiquement et algébriquement.

* **Solution :**

1) f est une fonction linéaire, donc son coefficient est : $a=\frac{f(-1)}{-1}=\frac{3}{-1}=-3$

$\Rightarrow f(x)=-3x$

* On a $g(0)=5$ donc $2\times 0+b=5$

$b=5$

Alors : $g(x)=2x+5$

2) * $f(2)=-3\times 2=-6$

* $g(-1)=2\times(-1)+5=-2+5=3$

3) L'équation $f(x)=-4$ est équivalente à

$-3x=-4$

$x=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

alors $f\left(\frac{4}{3}\right)=-4$

* L'équation $g(x)=7$ est équivalente

$2x+5=7$

$2x=7-5$

$2x=2$

$x=\frac{2}{2}=1$

Alors : $g(1)=7$

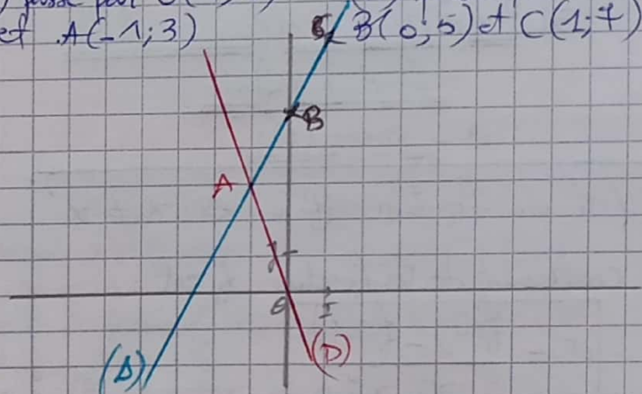
5)

x	0	-1
$f(x)$	0	3

x	0	1
$g(x)$	5	7

(D) passe par $O(0;0)$ et $A(-1;3)$

(Δ) passe par $B(0;5)$ et $C(1;7)$



6) graphiquement

Les deux droites (D) et (Δ) se coupent au point $H(-1;3)$

* algébriquement On résoud l'équation $f(x)=g(x)$

L'équation $f(x)=g(x)$ est équivalente à

$-3x=2x+5$

$-3x-2x=5$

$-5x=5$

$x=\frac{5}{-5}=-1$

et on a $f(-1)=3$

Alors le point $H(-1;3)$ est le point d'intersection de (D) et (Δ)