

Devoir Surveillé n°2

Correction

Troisième
Calculs numériques
 Durée 1 heure - Coeff. 4
 Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé. La maîtrise de la langue et la présentation rapporteront 1 point

Exercice 1. Compléter sur cette feuille

5 points

A compléter sur cette feuille (1,5 point)

Factoriser les expressions suivantes :

$$\bullet \quad 2x + 8 = \underline{2(x+4)} \quad \bigg| \quad \bullet \quad 2x^2 + x = \underline{x(2x+1)} \quad \bigg| \quad \bullet \quad 5x^2 - 15x = \underline{5x(x-3)}$$

A compléter sur cette feuille (3,5 points)

Développer les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l} \bullet \quad (1-3x)^2 = \underline{9x^2 - 6x + 1} \\ \bullet \quad (2x+3)(2-5x) = \underline{-10x^2 - 11x + 6} \end{array} \quad \bigg| \quad \begin{array}{l} \bullet \quad -2x(1-x) = \underline{-2x + 2x^2} \\ \bullet \quad (3+2x)(3-2x) = \underline{-4x^2 + 9} \end{array}$$

Exercice 2. Un programme

5 points

Programme 1

- Choisir un nombre entier positif.
- Ajouter 1.
- Calculer le carré du résultat obtenu.
- Enlever le carré du nombre de départ.
- Écrire le résultat.

1. On applique ce programme de calcul au nombre 3. Montrer que le résultat obtenu est 7.

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	3
Étape 2	Ajouter 1	$3 + 1 = 4$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$4^2 = 16$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$16 - 3^2 = 16 - 9 = \underline{7}$

Le résultat obtenu avec 3 au départ est bien 7.

2. Voici deux affirmations :

Affirmation 1

Le chiffre des unités du résultat obtenu est 7.

Affirmation 2

Chaque résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit.

2. a. Vérifier que ces deux affirmations sont vraies pour les nombres 8 et 13.

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	8	13
Étape 2	Ajouter 1	$8 + 1 = 9$	$13 + 1 = 14$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$9^2 = 81$	$14^2 = 196$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$81 - 8^2 = \underline{17}$	$196 - 13^2 = \underline{27}$

- Donc avec 8 on obtient 17,
17 est un nombre dont le chiffre des unités est 7 donc l'affirmation 1 est vraie.
En outre on a :

$$17 = 8 + 9$$

Le résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit. L'affirmation 2 est vraie.

- Donc avec 13 on obtient 27,
27 est un nombre dont le chiffre des unités est 7 donc l'affirmation 1 est vraie.
En outre on a :

$$27 = 13 + 14$$

Le résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit. L'affirmation 2 est vraie.

2. b. Pour chacune des affirmations, expliquez si elle est vraie ou fautive quelque soit le nombre choisi au départ.

- **Pour l'affirmation 1.**

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	1
Étape 2	Ajouter 1	$1 + 1 = 2$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$2^2 = 4$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$4 - 1^2 = 3$

En prenant 1 au départ on obtient 3 dont le chiffre des unités n'est pas 7, l'affirmation 1 n'est donc pas toujours vraie.

- **Pour l'affirmation 2.**

On va partir d'un nombre quelconque, entier positif que l'on peut noter n .

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	n
Étape 2	Ajouter 1	$n + 1$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$(n + 1)^2$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$(n + 1)^2 - n^2$

On obtient donc la différence de deux carrés $(n + 1)^2 - n^2$, terme que l'on peut développer :

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Or $2n + 1$ pour s'écrire sous la forme d'une somme de l'entier n et de son suivant $n + 1$:

$$2n + 1 = n + (n + 1)$$

L'affirmation 2 est donc toujours vraie.

Exercice 3. Choisir une forme adaptée de $C(x)$ **5 points**

On considère l'expression : $C(x) = (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3)$.

1. Montrer à l'aide d'un développement que $C(x) = -5x^2 - 9x - 4$.

$$\begin{aligned} C(x) &= (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3) \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 2(2x^2 + 3x + 2x + 3) \\ &= -x^2 + x + 2 - 4x^2 - 6x - 4x - 6 \\ C(x) &= \underline{-5x^2 - 9x - 4} \end{aligned}$$

2. Montrer à l'aide d'une factorisation que $C(x) = (x+1)(-5x-4)$.

$$\begin{aligned} C(x) &= (x+1) \times (2-x) - 2 \times (x+1) \times (2x+3) \\ &= (x+1) \left[(2-x) - 2(2x+3) \right] \\ &= (x+1) \left[2-x-4x-6 \right] \\ C(x) &= \underline{(x+1)(-5x-4)} \end{aligned}$$

3. Calculer $C(x)$ en remplaçant x par (-1) .

En utilisant la forme développée on obtient facilement :

$$C(-1) = \underbrace{(-1+1)}_0 \left(-5 \times (-1) - 4 \right)$$

$C(-1) = 0$

Exercice 4. Tableur**3 points**

On donne les expressions suivantes : $A(x) = (x-3)(5-2x)$ et $B(x) = -2x^2 + 11x - 15$.

1. Remplacer x par (-1) et montrer qu'alors $A(-1) = B(-1) = -28$. On obtient facilement :

$A(-1) = B(-1) = -28$

2. Jim utilise un tableur pour calculer les valeurs de ces deux expressions avec plusieurs nombres. Il a fait apparaître les résultats obtenus à chaque étape. Il obtient la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	x	A(x)	B(x)
2	-5	-120	-120
3	-4.5	-105	-105
4	-4	-91	-91
5	-3.5	-78	-78
6	-3	-66	-66
7	-2.5	-55	-55
8	-2	-45	-45
9	-1.5	-36	-36
10	-1	-28	-28
11	-0.5	-21	-21
12	0	-15	-15
13	0.5	-10	-10
14	1	-6	-6
15	1.5	-3	-3
16	2	-1	-1
17	2.5	0	0
18	3	0	0
19	3.5	-1	-1
20	4	-3	-3
21	4.5	-6	-6
22	5	-10	-10

La colonne B est obtenue à partir d'une formule écrite en B2, puis recopiée vers le bas. Quelle formule Jim a-t-il saisie dans la cellule B2 ?

Jim a saisi dans la cellule B2 la formule :

$= (A2 - 3) * (5 - 2 * A2)$

3. Formuler une conjecture ... et démontrez-la.

Il semble que les deux expressions donnent les mêmes valeurs. Pour prouver cette conjecture, on va développer $A(x)$:

D'une part :

$$A(x) = 5x - 2x^2 - 15 + 6x = \underline{-2x^2 + 11x - 15}$$

D'autre part :

$$B(x) = \underline{-2x^2 + 11x - 15}$$

Les deux expressions sont bien égales, pour toutes les valeurs de x on a :

$$\boxed{A(x) = B(x)}$$

Exercice 5. Pairs et impairs**1 point**

Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?

Affirmation 3

« La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre pair ».

- Méthode 1 : avec un contre-exemple.

Il suffit d'exhiber un contre-exemple qui invalide cette propriété. Par exemple la somme de l'entier pair 2 et de l'entier impair 3 vaut 5 qui est un entier impair.
L'affirmation 3 est donc fausse.

- Méthode 2 : démonstration.

Si les entiers N et M représentent des entiers naturels, un nombre pair s'écrit sous la forme $2N$ et un nombre impair sous la forme $2M + 1$. La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair s'écrit donc :

$$2N + 2M + 1 = 2 \underbrace{(N + M)}_{\in \mathbb{N}} + 1$$

La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est donc toujours un nombre impair.

∞ Fin du devoir ∞

Bonus

Factoriser l'expression :

$$\begin{aligned} G(x) &= 2x - 4 - 3(7 - 3x)(x - 2) \\ &= 2 \times (x - 2) - 3 \times (7 - 3x) \times (x - 2) \\ &= (x - 2) \times [2 - 3 \times (7 - 3x)] \\ &= (x - 2) \times [2 - 21 + 9x] \\ G(x) &= \underline{(x - 2)(9x - 19)} \end{aligned}$$