Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Une laiterie conditionne du fromage râpé dans des sachets. La masse de fromage que doit contenir chaque sachet est de **125** grammes.

Partie A

On choisit au hasard un sachet dans l'ensemble des sachets produits. La variable aléatoire X représentant la masse de fromage contenu dans le sachet, exprimée en **grammes**, suit une loi normale. Le tableau ci-dessous donne, pour certaines valeurs de k, une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité $\mathbb{P}(X \leq k)$ que la masse de fromage contenu dans le sachet soit inférieure ou égale à k grammes.

k	124	$124,5$	125	$125,5$	126	$126,5$
$\mathbb{P}(X \leq k)$	$0,0013$	$0,0062$	$0,0228$	$0,0668$	$0,1587$	$0,3085$

k	127	$127,5$	128	$128,5$	129	$129,5$
$\mathbb{P}(X \leq k)$	$0,5$	$0,6915$	$0,8413$	$0,9332$	$0,9772$	$0,9938$

La laiterie considère que :
- le sachet est conforme lorsque sa masse de fromage est comprise entre **125** et **129** grammes,
- le sachet est refusé si sa masse de fromage est strictement inférieure à **125** grammes,
- le sachet est recalibré si sa masse de fromage est strictement supérieure à **129** grammes.

I-A-1- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_1 que le sachet soit refusé.

I-A-2- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_2 que le sachet soit recalibré.

I-A-3- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_3 que le sachet soit conforme.

Partie B

Un lot de sachets de fromage est livré à un hypermarché. On admet que la proportion de sachets non conformes dans le lot est $p = 0,04$.

I-B-1- **20** sachets prélevés au hasard lors de la livraison sont contrôlés. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de sachets non conformes parmi ces **20** sachets. Y suit une loi binomiale.

I-B-1-a- Quels sont les paramètres de la loi de Y ?

I-B-1-b- Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité P_4 qu'il y ait exactement un sachet non conforme.

I-B-1-c- Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité P_5 qu'il y ait au plus un sachet non conforme.

I-B-2- L'intervalle de fluctuation asymptotique à **95%** de la fréquence de sachets non conformes pour un échantillon de taille n est :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

I-B-2-a- Donner l'intervalle I pour un échantillon de taille **200**. Les bornes de I seront arrondies à 10^{-3} près.

I-B-2-b- Lors d'une livraison, l'hypermarché contrôle la conformité des sachets en prélevant **200** sachets au hasard. **5** sachets s'avèrent être non conformes. Au vu de l'intervalle I précédent, une réclamation auprès de la laiterie est-elle justifiée ? Expliquer pourquoi.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1-	$P_1 \simeq 0,0228$
I-A-2-	$P_2 \simeq 0,0228$
I-A-3-	$P_3 \simeq 0,9544$
I-B-1-a-	Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,04$
I-B-1-b-	$P_4 \simeq 0,368$
I-B-1-c-	$P_5 \simeq 0,810$
I-B-2-a-	$I = [0,012\,;\,0,068]$
I-B-2-b-	Une réclamation **n'est pas** justifiée car la proportion de sachets non conformes dans l'échantillon de 200 sachets est : $\frac{5}{200} = 0,025$ et cette proportion appartient à l'intervalle de fluctuation I : $0,025 \in [0,012\,;\,0,068]$.

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 60 - 50 \times 0,8^n.$$

II-A-1- Donner les valeurs exactes de u_0, u_1, u_2 et une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{10}.

II-A-2-a- Donner, pour tout entier n, l'expression de u_{n+1} en fonction de n.

II-A-2-b- En déduire que, pour tout entier n, $\quad u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,8^n$.

II-A-2-c- Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

II-A-3- Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Justifier la réponse.

II-A-4 Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $\quad u_n \geq 50$. Justifier la réponse.

Partie B

Un opérateur de téléphonie mobile, dont le nombre d'abonnés s'élevait à **10** milliers en **2010**, constate que, depuis **2010** :
- il y a **12** milliers de nouveaux abonnés chaque année,
- **80%** des abonnés reconduisent leur abonnement l'année suivante.

L'opérateur pense que cette situation va se prolonger dans les années suivantes.
Ainsi en notant, pour tout entier n, u_n le nombre d'abonnés, exprimés en **milliers**, de l'année $2010 + n$, on peut écrire :

$$u_0 = 10 \quad \text{et} \quad \text{pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = 0,8\, u_n + 12.$$

On admet que, pour tout entier n, $\quad u_n = 60 - 50 \times 0,8^n$.

II-B-1- Quel était le nombre d'abonnés en **2011** ? en **2012** ?

II-B-2- Donner, à l'unité près, le nombre d'abonnés prévus en **2020**.

II-B-3- A partir de quelle année le nombre d'abonnés sera-t-il au moins cinq fois plus élevé qu'en **2010** ? Justifier la réponse.

II-B-4- On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
        n est un entier naturel, u est un réel
Début de l'Algorithme
        n prend la valeur 0
        u prend la valeur 10
        Tant que   |u − 60| > 10^-1   faire
        |       n prend la valeur n + 1
        |       u prend la valeur 0,8 × u + 12
         FinTantque
        Afficher n
Fin de l'algorithme
```

En utilisant le tableau donné ci-dessous, donner la valeur affichée par cet algorithme.

Extrait de la table de valeurs approchées à 10^{-3} près des termes de la suite (u_n) :

n	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
u_n	**59,705**	**59,764**	**59,811**	**59,849**	**59,879**	**59,903**	**59,923**	**59,938**	**59,950**	**59,960**

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-	$u_0 = 10$ $\quad u_1 = 20$ $\quad u_2 = 28$ $\quad u_{10} \simeq 54,631$
II-A-2-a-	Pour tout entier n, $\quad u_{n+1} = 60 - 50 \times 0,8^{n+1}$
II-A-2-b-	Pour tout entier n, $\quad u_{n+1} - u_n = 60 - 50 \times 0,8^{n+1} - (60 - 50 \times 0,8^n)$ $= -50\left(0,8^{n+1} - 0,8^n\right) = -50 \times 0,8^n \times (0,8-1) = 10 \times 0,8^n$
II-A-2-c-	La suite (u_n) est strictement croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,8^n > 0$.
II-A-3-	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 60$ car, comme $-1 < 0,8 < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$.
II-A-4-	$n_0 = 8$ car $u_n \geq 50 \Leftrightarrow 60 - 50 \times 0,8^n \geq 50$ $\Leftrightarrow -50 \times 0,8^n \geq -10$ $\Leftrightarrow 50 \times 0,8^n \leq 10$ $\Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,2$ $\Leftrightarrow e^{n \ln 0,8} \leq 0,2$ $\Leftrightarrow n \ln 0,8 \leq \ln 0,2$ $\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,8} = 7,212...$ car $\ln 0,8 < 0$
II-B-1-	En **2011**, le nombre d'abonnés était de **20000** En **2012**, le nombre d'abonnés était de **28000**
II-B-2-	En **2020**, il devrait y avoir environ **54631** abonnés.
II-B-3-	C'est à partir de l'année **2018** que le nombre d'abonnés devrait être au moins cinq fois plus élevé qu'en **2010**. En effet d'après **II-A-4-**, $u_n \geq 50$ dès que $n \geq 8$ et $2010 + 8 = 2018$.
II-B-4-	Valeur affichée par l'algorithme : $n = 28$.

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux réels. On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie par :

$$\text{pour tout réel } x \in \,]0\,;\,+\infty[, \quad f(x) = x + a + \frac{b}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

f' désigne la dérivée de f.

Partie A

III-A-1- Pour tout réel $x > 0$, donner $f'(x)$ en fonction de b.

III-A-2- Exprimer $f(1)$ en fonction de a et b et $f'(1)$ en fonction de b.

III-A-3- $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(1\,;\,2)$ et admet en ce point une tangente horizontale.

III-A-3-a- En déduire les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.

III-A-3-b- Déterminer les valeurs de a et b. Justifier les calculs.

Partie B

On admet que la fonction f est définie par :

$$\text{pour tout } x \in \,]0\,;\,+\infty[, \quad f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

III-B-1-a- Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

III-B-1-b- Donner $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote Δ dont on donnera une équation cartésienne.

III-B-2- Donner, pour tout $x > 0$, $f'(x)$.

III-B-3- Dresser le tableau des variations de f.

III-B-4- Soit I le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point I.

III-B-5- Sur la figure, placer les points A et I, tracer les tangentes $\mathcal{C}_f$ en A et I, puis tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

III-B-6- On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$.

III-B-6-a- Sur la figure de la question **III-B-5-**, hachurer le domaine $\mathcal{D}$.

III-B-6-b- Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aires, du domaine $\mathcal{D}$. Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$. Détailler le calcul.

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1- Pour tout $x > 0$, $\quad f'(x) = 1 - \dfrac{b}{x^2}$

III-A-2- $f(1) = 1 + a + b \qquad\qquad f'(1) = 1 - b$

III-A-3-a- $f(1) = 2 \qquad\qquad f'(1) = 0$

III-A-3-b- $a = 0 \qquad\qquad b = 1$

En effet $\begin{cases} 1 + a + b = 2 \\ 1 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + 1 = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$

III-B-1-a- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

III-B-1-b- $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty \qquad\qquad \Delta\ : x = 0$

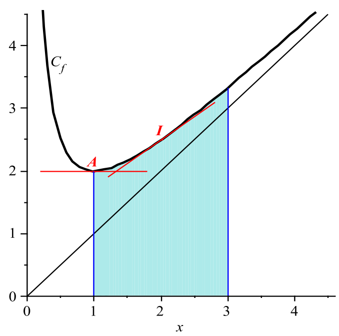
III-B-2- Pour tout $x > 0$, $\quad f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

III-B-3-

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\| +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

III-B-4- Equation de la tangente en I : $\quad y = \dfrac{3}{4}x + 1$

III-B-5-



III-B-6-a- Utiliser la figure de **III-B-5-**.

III-B-6-b- $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_1^3 = 4 + \ln 3$

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Un apiculteur étudie l'évolution du nombre d'abeilles qui vivent dans ses ruches.

Partie A

Il estime que, au **15** mars **2014**, **4** millions d'abeilles vivaient dans ses ruches.
A partir de cette date, pour tout $t \geq 0$, $y(t)$ désigne le nombre d'abeilles estimé dans ses ruches au bout du temps t.
$y(t)$ est exprimé en **millions** et le temps t est exprimé en **années**.
On observe, depuis quelques années, une diminution régulière du nombre d'abeilles d'année en année.
Si aucune action pour la protection des abeilles n'est mise en place, on sait que la fonction y est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E) \;:\quad y'(t) + 0,34\, y(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad y(0) = 4\,.$$

IV-A-1- y vérifie : pour tout $t \geq 0$, $y(t) = Ce^{\lambda t}$ où C et λ sont des réels. Donner les valeurs de C et λ.

IV-A-2-a- Déterminer le nombre d'abeilles estimé au bout d'un an, c'est-à-dire le 15 mars 2015. Le résultat sera donné à **1000** unités près. Justifier la réponse.

IV-A-2-b- Déterminer le pourcentage de baisse du nombre d'abeilles estimé entre le **15** mars **2014** et le **15** mars **2015**. Le résultat sera donné à 10^{-2} près. Justifier le résultat.

IV-A-3- Déterminer le nombre d'abeilles estimé au 15 mars 2024. Le résultat sera donné à **1000** unités près. Justifier la réponse.

IV-A-4- Au bout de quelle durée D le nombre d'abeilles aura-t-il diminué de moitié par rapport au **15** mars **2014** ? On donnera une valeur approchée de D au jour près. Justifier le résultat.

IV-A-5- Donner $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.

Partie B

Une action de protection des abeilles est mise en place. Un ingénieur biologiste affirme que le nombre d'abeilles estimé au bout du temps t est maintenant donné par :

pour tout $t \geq 0$, $\qquad g(t) = \dfrac{1}{k\, e^{-0,34\, t} + 1}$ $\qquad$ où k est un nombre réel.

$g(t)$ est exprimé en **millions** et le temps t en **années**.

IV-B-1- Déterminer la valeur de k pour que $g(0) = 4$. Justifier le résultat.

IV-B-2- Déterminer le nombre d'abeilles estimé au **15** mars **2024**. Le résultat sera donné à **1000** unités près.

IV-B-3- Donner $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$.

IV-B-4- Peut-on estimer que l'action de protection des abeilles mise en place va être efficace ? Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-A-1-	$C = 4$ $\lambda = -0,34$
IV-A-2-a-	Au **15** mars **2015**, on estime qu'il y aura environ **2847000** abeilles car $y(1) = 4\,e^{-0,34\times 1} = 4\,e^{-0,34} = 2,847081291....$
IV-A-2-b-	Le nombre d'abeilles a baissé de $28,88\%$ car $\dfrac{y(1)-y(0)}{y(0)} = \dfrac{4e^{-0,34}-4}{4} = e^{-0,34} - 1 = -0,28822.....$
IV-A-3-	Au **15** mars **2024**, on estime qu'il y aura environ **133000** abeilles car $y(10) = 4\,e^{-0,34\times 10} = 4\,e^{-3,4} = 0,1334930...$
IV-A-4-	$D \simeq 2$ ans et **14** jours car on résoud l'équation : $y(D) = 0,5\,y(0)$, soit : $y(D) = 2 \Leftrightarrow 4\,e^{-0,34\,D} = 2 \Leftrightarrow e^{-0,34\,D} = 0,5 \Leftrightarrow$ $-0,34\,D = \ln 0,5 \Leftrightarrow D = \dfrac{\ln 0,5}{-0,34} = 2,0386681...$ De plus $0,03866...$ ans $= 0,03866... \times 365$ jours $= 14,11...$ jours.
IV-A-5-	$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$
IV-B-1-	$k = -\dfrac{3}{4}$ En effet : $g(0) = 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{k+1} = 4 \Leftrightarrow k+1 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow k = -\dfrac{3}{4}$
IV-B-2-	Au **15** mars **2024**, on estime qu'il y aura environ **1025000** abeilles car $g(10) = \dfrac{1}{-\frac{3}{4}e^{-3,4}+1} = 1,0256725....$
IV-B-3-	$\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 1$
IV-B-4-	On estime que l'action de protection des abeilles mise en place **a été** efficace car le nombre d'abeilles ne tend plus vers **0** mais tend à se stabiliser vers **1000000** et au bout de **10** ans, il y aura encore **1025000** abeilles donc beaucoup plus que les **133000** abeilles prévues si rien n'avait été fait.