Le sujet comporte 10 pages numérotées de 2 à 11

EXERCICE I - (7 points)

Donner les réponses de la Partie A de cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

On considère la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right), \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{3}$.

Partie A

On étudie dans cette partie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right), \qquad \text{pour tout } x > 0$$

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I-A-1- Donner les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

I-A-2-a- Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.

I-A-2-b- Compléter le tableau des variations de f.

I-A-2-c- En déduire que f admet un minimum m que l'on précisera.

I-A-3-a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \dfrac{1}{2}x\right)$.

I-A-3-b- En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote Δ dont on donnera une équation.

I-A-4-a- Donner l'expression de $f(x) - x$ en fonction de x.

I-A-4-b- Etudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de $x \in \mathbb{R}_+^*$.

I-A-5- Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$, la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}_f$.

REPONSES A L'EXERCICE I (Partie A)

I-A-1- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

I-A-2-a- $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-3}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x^2}$

I-A-2-b-

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

I-A-2-c- $m = \sqrt{3}$

I-A-3-a- $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \dfrac{1}{2}x\right) = 0$

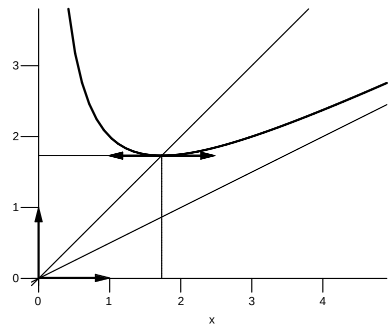
I-A-3-b- $\Delta \; : \quad y = \dfrac{1}{2}x$

I-A-4-a- $f(x) - x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3-x^2}{x} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{x}$

I-A-4-b-

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de $(f(x) - x)$		$+$	0	$-$	

I-5-



graph

EXERCICE I - (suite)

Donner les réponses à la Partie B de cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Partie B

On rappelle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right), \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

I-B-1- En utilisant la **Partie A**, montrer que pour tout entier n, on a :

$$u_n \geq \sqrt{3}$$

I-B-2- En utilisant la **Partie A** et la question **I-B-1-** , expliquer pourquoi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

I-B-3-a- Expliquer alors pourquoi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle. On note l cette limite.

I-B-3-b- Justifier que $l = \sqrt{3}$.

REPONSES A L'EXERCICE I (Partie B)

I-B-1-	Pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \geq \sqrt{3}}$ car - Tout d'abord $\boldsymbol{u_0 = 3 \geq \sqrt{3}}$. - Si on suppose que pour un entier $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{u_p \geq \sqrt{3}}$, alors on a $\boldsymbol{u_{p+1} = f(u_p)}$. Or d'après la question **I-A-2-c-**, la fonction $\boldsymbol{f}$ admet $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ comme minimum, donc : $\boldsymbol{u_{p+1} = f(u_p) \geq \sqrt{3}}$. - Ainsi, on a montré par récurrence que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{u_n \geq \sqrt{3}}$.
I-B-2-	$\boldsymbol{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ est décroissante car Pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n}$. Comme, d'après **I-B-1-**, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \geq \sqrt{3}}$, alors, d'après **I-A-4-b-**, $\boldsymbol{f(u_n) - u_n \leq 0}$. Ainsi, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0}$, Donc pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$
I-B-3-a-	$\boldsymbol{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ a une limite $\boldsymbol{l}$ car elle est décroissante et minorée par $\boldsymbol{\sqrt{3}}$. Or toute suite décroissante et minorée converge.
I-B-3-b-	$\boldsymbol{l = \sqrt{3}}$ car On peut déjà remarquer que d'après **I-B-1-**, on a $\boldsymbol{l \geq \sqrt{3}}$. De plus $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l}$. Ainsi, d'après la définition de la suite, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$, Donc, la limite $\boldsymbol{l}$ doit vérifier : $\boldsymbol{l = f(l)}$. D'après **I-A-4-a-** et **I-A-4-b-**, $\boldsymbol{l = \sqrt{3}}$.

EXERCICE II - (4 points)

Donner les réponses de cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$(E) \quad : \qquad x^2 + (1 - e^2)\, e^x\, x - e^{2+2x} = 0$$

II-A-1-a- Mettre e^{2x} en facteur dans le membre de gauche de l'équation (E).

II-A-1-b- Déterminer l'expression de X en fonction de x pour que l'équation (E) soit équivalente à l'équation (E') suivante :

$$(E') \quad : \quad X^2 + (1 - e^2)\, X - e^2 = 0$$

II-A-2-a- Déterminer le réel b pour que l'on ait :

$$(1 - e^2)^2 + 4\, e^2 = (1 + b)^2$$

II-A-2-b- Déterminer alors les deux solutions réelles X_1 et X_2 de l'équation (E').

II-A-3- En déduire que x est une solution de (E) si et seulement si x vérifie une des équations :

$$x = -\, e^{g(x)} \qquad \textbf{ou} \qquad x = e^{h(x)}$$

où g et h sont des fonctions que l'on déterminera. Justifier la réponse.

II-A-4- On considère dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation $y = e^x$.

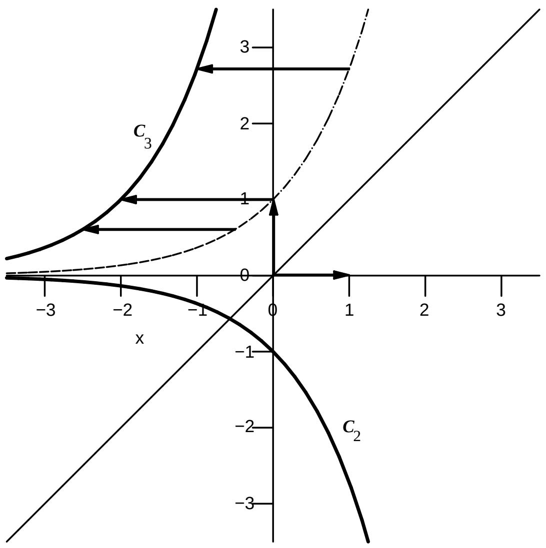
II-A-4-a- Par quelle transformation géométrique simple la courbe $\mathcal{C}_2$ d'équation $y = -e^x$ se déduit-elle de $\mathcal{C}_1$?

II-A-4-b- Par quelle transformation géométrique simple la courbe $\mathcal{C}_3$ d'équation $y = e^{2+x}$ se déduit-elle de $\mathcal{C}_1$?

II-A-4-c- Tracer l'allure des courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

II-A-5- Déterminer graphiquement, à l'aide de la question **II-A-4-c-**, le nombre de solutions de l'équation (E). Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-a-	(E) : $\quad e^{2x}\left(\dfrac{x^2}{e^{2x}}+(1-e^2)\dfrac{x}{e^x}-e^2\right)=0$
II-A-1-b-	$X=\dfrac{x}{e^x}$
II-A-2-a-	$b=e^2$
II-A-2-b-	$X_1=-1$ $\qquad\qquad$ $X_2=e^2$
II-A-3-	$g(x)=x$ $\qquad\qquad$ $h(x)=x+2$ car $\quad$ x est solution de $(E)\Longleftrightarrow X$ est solution de (E') $\Longleftrightarrow X=\dfrac{x}{e^x}=-1$ ou $X=\dfrac{x}{e^x}=e^2$ $\Longleftrightarrow x=-\,e^x$ ou $x=e^x.\,e^2=e^{x+2}$
II-A-4-a-	$\mathcal{C}_2$ se déduit de $\mathcal{C}_1$ par une symétrie axiale par rapport à l'axe (Ox).
II-A-4-b-	$\mathcal{C}_3$ se déduit de $\mathcal{C}_1$ par une translation de vecteur $-2\vec{\imath}$.
II-A-4-c-	
II-A-5-	Nombre de solutions de (E) : une seule solution car la droite $\mathcal{D}$ ne coupe pas la courbe $\mathcal{C}_3$ et ne coupe qu'une seule fois la courbe $\mathcal{C}_2$.

graph2

EXERCICE III - (5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et F d'affixe respective :

$$z_A = 4 + 4i\,, \qquad z_B = 4\,, \qquad z_C = 7\,, \qquad z_F = 4 + 3i.$$

On désigne par E le point d'intersection des droites (AC) et (OF).

Partie A

III-A-1- Faire une figure complète.

III-A-2-a- Calculer $\dfrac{z_F}{z_A - z_C}$ sous forme algébrique.

III-A-2-b- Que peut-on déduire de la question **III-A-2-a-**, pour les droites (OF) et (AC). Justifier la réponse.

III-A-3- On veut vérifier que le point F est le barycentre du système de points pondérés $\left\{(0\,;\,3)\,,(A\,;\,\alpha)\,,(C\,;\,25-\alpha)\right\}$, où α est un réel.

III-A-3-a- Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OF}$ en fonction de α, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$.

III-A-3-b- Déterminer la valeur de α.

III-A-4- Le point E d'intersection des droites (AC) et (OF) est barycentre du système $\{(A\,;\,\beta)\,,(C\,;\,4)\}$. Déterminer la valeur de β.

Partie B

On considère les cercles suivants :

- Le cercle C_1, circonscrit au triangle BOF, de centre Ω_1 et de rayon r_1.
- Le cercle C_2, circonscrit au triangle OEC, de centre Ω_2 et de rayon r_2.
- Le cercle C_3, circonscrit au triangle ABC, de centre Ω_3 et de rayon r_3.
- Le cercle C_4, circonscrit au triangle AEF, de centre Ω_4 et de rayon r_4.

III-B-1- Donner les affixes z_1, z_2, z_3 et z_4 des points Ω_1, Ω_2, Ω_3 et Ω_4.

Calculer r_1, r_2 r_3 et r_4.

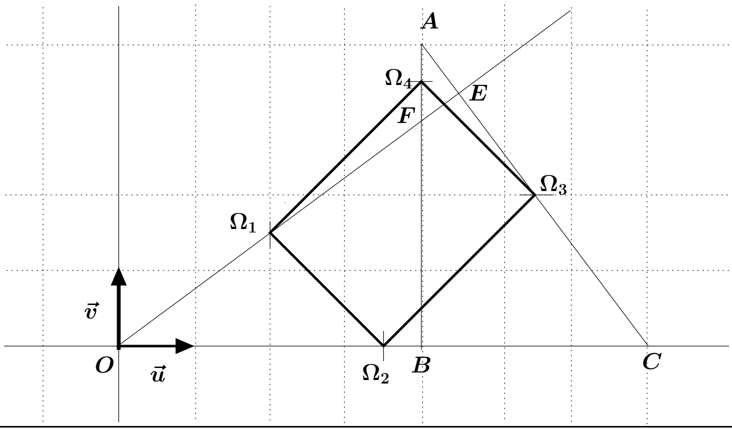
III-B-2- Calculer $z_3 - z_4$ et $z_2 - z_1$ sous forme algébrique.

Que peut-t-on en déduire pour le quadrilatère $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$?

III-B-3- Calculer $\dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4}$ sous forme algébrique.

Que peut-t-on en déduire pour le quadrilatère $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$?

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-	
III-A-2-a-	$\dfrac{z_F}{z_A - z_C} = \dfrac{4+3i}{-3+4i} = \dfrac{4+3i}{i(3i+4)} = \dfrac{1}{i} = -i$
III-A-2-b-	(OF) et (AC) sont perpendiculaires car d'après **III-A-2-a-**, on a : $\dfrac{z_F - z_O}{z_A - z_C} = -i$, Donc $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}\right) = Arg\left(\dfrac{z_F - z_O}{z_A - z_C}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$, d'où $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{OF}$.
III-A-3-a-	$\overrightarrow{OF} = \dfrac{\alpha}{28}\,\overrightarrow{OA} + \dfrac{25-\alpha}{28}\,\overrightarrow{OC}$
III-A-3-b-	$\alpha = 21$
III-A-4-	$\beta = 21$
III-B-1-	$z_1 = 2 + \dfrac{3}{2}i$ $z_2 = \dfrac{7}{2}$ $z_3 = \dfrac{11}{2} + 2i$ $z_4 = 4 + \dfrac{7}{2}i$ $r_1 = \dfrac{5}{2}$ $r_2 = \dfrac{7}{2}$ $r_3 = \dfrac{5}{2}$ $r_4 = \dfrac{1}{2}$
III-B-2-	$z_3 - z_4 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$ $z_2 - z_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i$ $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ est un parallélogramme.
III-B-3-	$\dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i}{-2-2i} = -\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right) = -\dfrac{3}{8}(1-i)^2 = \dfrac{3}{4}\,i.$ $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ est un rectangle.

EXERCICE IV (4 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 11

On se propose de déterminer toutes les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{E}) \quad : \quad f'(x) - 3\,f(x) = \frac{3}{1 + e^{-3x}}$$

et qui vérifient : $\qquad f(0) = 0$.

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. On désigne par f' sa dérivée.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^{-3x}\,f(x)$$

On désigne par h' la dérivée de h.

IV-1-a- Exprimer $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$, pour tout réel x.

IV-1-b- Expliquer pourquoi la dérivée h' de h vérifie, pour tout réel x :

$$h'(x) = \frac{3\,e^{-3x}}{1 + e^{-3x}}.$$

IV-2- Déterminer alors toutes les fonctions h possibles. On justifiera la réponse.

IV-3- En déduire toutes les fonctions f solutions de $(\mathcal{E})$.

IV-4- Déterminer la fonction f_0, solution de $(\mathcal{E})$, qui vérifie $f_0(0) = 0$.

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a-	$h'(x) = -3\,e^{-3x}\,f(x) \,+\, e^{-3x}\,f'(x) = e^{-3x}\left(f'(x) - 3f(x)\right)$.
IV-1-b-	$h'(x) = \dfrac{3\,e^{-3\,x}}{1\,+\,e^{-3\,x}}$ car : D'après **IV-1-a-**, on a $h'(x) = e^{-3x}\left(f'(x) - 3f(x)\right)$ Et d'après $(\mathcal{E})$, on a : $f'(x) \,-\, 3\,f(x) \,=\, \dfrac{3}{1\,+\,e^{-3\,x}}$,
IV-2-	$h(x) \,=\, -\,\ln\left(1+e^{-3x}\right) \,+\, C$ où C est un réel quelconque car : En posant $u(x) = 1 + e^{-3x}$ on a $u'(x) = \,-\,3\,e^{-3x}$. Ainsi, d'après **IV-1-b-**, on a : $h'(x) = \dfrac{3\,e^{-3\,x}}{1\,+\,e^{-3\,x}} = -\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ En intégrant cette égalité, on obtient : $h(x) = \,-\,\ln\lvert u(x)\rvert + C = \,-\,\ln\lvert 1+e^{-3x}\rvert + C = \,-\,\ln\left(1+e^{-3x}\right) + C$ car pour tout réel x, $1 + e^{-3x} > 0$.
IV-3-	$f(x) \,=\, e^{3x}\,h(x) = \,-\,e^{3x}\,\ln\left(1+e^{-3x}\right) \,+\, C\,e^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
IV-4-	$f_0(x) \,=\, e^{3x}\,h(x) = \,-\,e^{3x}\,\ln\left(1+e^{-3x}\right) + \ln(2)\,e^{3x} \,=\, e^{3x}\,\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-3x}}\right)$.