CONCOURS ATS
-SESSION 2020-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels, et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. On définit, pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, la matrice A_a par

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose également $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calcul que A_1 est diagonalisable.
2. Soit a un réel. Calculer $A_a U_1$. En déduire que 2 est valeur propre de A_a.
3. Soit a un réel. Déterminer le polynôme caractéristique de A_a.
4. Donner, en discutant selon les valeurs du réel a, les valeurs propres réelles de A_a et leurs ordres de multiplicité. On recopiera et on complétera le tableau synthétique suivant.

Cas	**Valeurs propres réelles de A_a et ordres de multiplicité**
$a < 0$	
$a = 0$	
$a > 0$ et $a \neq 4$	
$a = 4$	

5. (a) Justifier que si $a > 0$ et $a \neq 4$, alors A_a est diagonalisable.
   (b) Déterminer une base du noyau de A_0. La matrice A_0 est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?
6. Étude de la matrice A_4.
   (a) Déterminer une matrice colonne $U_2 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que (U_1, U_2) soit une base de l'espace propre de A_4 associé à la valeur propre 2.
   (b) Déterminer une matrice colonne $U_3 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que (U_3) soit une base de l'espace propre de A_4 associé à la valeur propre -2.
   (c) Calculer la matrice inverse de $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
   (d) Trouver une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A_4 = PDP^{-1}$.

On définit trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$, $v_0 = -1$, $w_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 4v_n \\ w_{n+1} = u_n + 2w_n \end{cases}$$

On pose, pour tout entier naturel n, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

8. (a) Déterminer une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = BX_n$.
   (b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que $B = A_a + bI_3$.
   (c) En déduire que X_0 est un vecteur propre de la matrice B associé à une valeur propre que l'on précisera.
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n.

Exercice 2

On considère la fonction $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

On rappelle que $\mathrm{i}\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0\}$ désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs, et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Lieux de points

Les trois questions de cette partie peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Soient les nombres complexes $a = 1$, $b = -3$ et $c = \dfrac{-3 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{3}$. Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ et montrer que les points A, B et C d'affixes respectives $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment un triangle équilatéral.
2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$.

Partie B – Étude d'une suite récurrente

1. (a) Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution, puis que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution que l'on exprimera en fonction de ω.
   (b) La fonction f est-elle injective ? Surjective ?
   (c) Montrer que pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2. (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$.
   (b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$?
   (c) Montrer que si $u_0 \notin \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.

On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ et on introduit la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - \mathrm{i}}{u_n + \mathrm{i}}.$$

D'après la question précédente, la suite (v_n) et bien définie puisque $u_0 \neq -\mathrm{i}$ et donc pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq -\mathrm{i}$.

3. (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\mathrm{i}$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est également périodique de période 4.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + m\,x\,y'(x) + y(x) = x^2 \qquad (E_m)$$

d'inconnue une fonction réelle y définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, où m est un paramètre réel. On note (H_m) l'équation homogène associée à (E_m) :

$$y''(x) + m\,x\,y'(x) + y(x) = 0. \qquad (H_m)$$

Les parties A, B, C et D de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Étude du cas $m = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (H_0).
2. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle (E_0) définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, où α et β sont des réels à déterminer.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0).
4. Donner l'unique solution $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E_0) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Partie B – Étude du cas $m = 1$

Dans les trois premières questions de cette partie, on cherche les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ qui sont solutions de l'équation différentielle homogène (H_1) et pour lesquelles $a_1 = 0$.

1. Montrer que la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}.$$
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!} a_0$ et $a_{2n+1} = 0$.
3. Donner une expression simple de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en fonction de x et a_0.

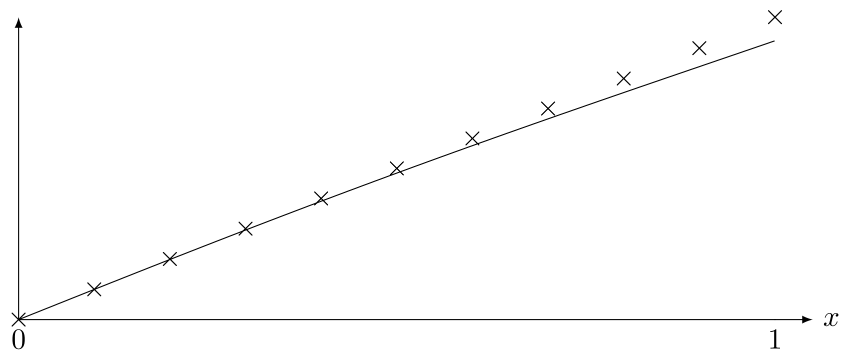
Partie C – Résolution approchée d'un problème de Cauchy

Soit N un entier naturel non nul. Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation (E_0), avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ par la méthode d'Euler, en prenant un pas égal à $1/N$. On admet que cela revient à calculer les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1/N$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) + u_n = \frac{n^2}{N^2}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+2} en fonction de N, n, u_n et u_{n+1}.
2. Écrire une fonction `cauchy`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul N et renvoie le vecteur $[u_0, u_1, \ldots, u_N]$.

Sur la figure suivante, on représente le graphe de la solution théorique du problème de Cauchy sur l'intervalle $[0\,,1]$, ainsi que les points de coordonnées $(k/N, u_k)$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ (ici, on a choisi $N = 10$).



3. Comment agir sur le paramètre N pour améliorer la solution approchée ? Quel est l'impact sur le temps de calcul ?

Partie D – Existence d'une solution polynomiale non nulle

L'objectif de cette partie est de trouver les valeurs de m pour lesquelles l'équation différentielle homogène (H_m) admet au moins une solution polynomiale non nulle.

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On suppose, dans cette question, qu'il existe un polynôme P non nul de degré d solution de (H_m). Montrer que $d \neq 0$ et que $m = -1/d$.

Dans les questions qui suivent, nous allons étudier le résultat réciproque. On fixe un entier naturel non nul $d \in \mathbb{N}^*$ et on souhaite montrer que $(H_{-1/d})$ admet une solution polynomiale non nulle.

On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur à d, et on considère l'application $h\colon \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_d[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_d[X], \quad h(P) = P'' - \frac{1}{d} X P' + P.$$

2. (a) Donner sans justification la dimension de $\mathbb{R}_d[X]$.
   (b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on a $\deg h(P) \leqslant d - 1$.
   (c) Montrer que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.
3. Montrer que l'application linéaire h n'est pas surjective.
4. En déduire l'existence d'une solution polynomiale non nulle de l'équation différentielle homogène $(H_{-1/d})$.

Exercice 4

On rappelle que la ***partie entière*** d'un nombre réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n + 1.$$

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\lfloor x+1 \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.
   (b) Montrer que la fonction f est périodique de période 1.
   (c) Exprimer $f(x)$ pour $x \in [0\,,1[$ et préciser la valeur de $f(1)$.
   (d) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\,,2]$.
   (e) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

On note

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x))$$

la série de Fourier de la fonction f.

2. (a) Calculer le coefficient a_0.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $a_n = 0$.
   (c) Calculer les coefficients b_n.
   (d) Montrer que la série de Fourier de f est convergente. Énoncer le théorème utilisé et préciser la fonction vers laquelle elle converge.
3. (a) Justifier la convergence de la série numérique $U = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.
   (b) Trouver une relation entre U et $Sf(1/4)$.
   (c) Montrer que $U = \pi/4$.
4. (a) Énoncer le théorème de Parseval.
   (b) Calculer la somme $V = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.