

Exercice 1

1. (a) Soient (x, y, z, t) et (x', y', z', t') deux vecteurs de \mathbb{R}^4 et λ un réel;

$$\begin{aligned} p(\lambda(x, y, z, t) + (x', y', z', t')) &= p(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t') \\ &= \left(\frac{\lambda x + x'}{2} + \frac{\lambda z + z'}{2}, \lambda y + y', \frac{\lambda x + x'}{2} + \frac{\lambda z + z'}{2}, \lambda t + t' \right) \\ &= \lambda \left(\frac{x}{2} + \frac{z}{2}, y, \frac{x}{2} + \frac{z}{2}, t \right) + \left(\frac{x'}{2} + \frac{z'}{2}, y', \frac{x'}{2} + \frac{z'}{2}, t' \right) \\ &= \lambda p((x, y, z, t)) + p((x', y', z', t')) \end{aligned}$$

donc p est une application linéaire

(b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 ; $p(e_1) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$; $p(e_2) = (0, 1, 0, 0)$; $p(e_3) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ et $p(e_4) = (0, 0, 0, 1)$; on en déduit la matrice de p dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) P est une matrice symétrique réelle donc P est diagonalisable dans \mathbb{R}^4

2. (a) $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $S^2 = I_4$

(b) $\chi_S(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^3(x+1)$

On en déduit que S admet deux valeurs propres $\lambda_1 = -1$, de multiplicité 1 et $\lambda_2 = 1$ de multiplicité 3

(c) $E_{-1} = \text{Ker}(-I_4 - S) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

(d) $E_1 = \text{Ker}(I_4 - S) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(e) On en déduit la matrice de passage $U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) On a montré que $S^2 = I_4$ donc pour tout entier n pair on montrerait que $S^n = I_4$ et pour tout entier n impair, $S^n = S$; donc $S^{2017} = S$

3. (a) Par définition, F et G sont les espaces vectoriels engendrés respectivement par (u_1) et (u_2, u_3, u_4) , deux familles de vecteurs de \mathbb{R}^4 , donc F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4

(b) Soit $u \in F$ alors $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, v = \lambda_1 u_1$;

de même, soit $w \in G$ donc $\exists (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^3, w = \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$;

par linéarité du produit scalaire : $v \cdot w = (\lambda_1 \lambda_2) u_1 \cdot u_2 + (\lambda_1 \lambda_3) u_1 \cdot u_3 + (\lambda_1 \lambda_4) u_1 \cdot u_4 = 0$

v et w sont bien orthogonaux pour le produit scalaire canonique

(c) On sait que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$; $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 3$; il suffit de montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Soit $v \in F \cap G$, alors $v \in F$ et $v \in G$ et, d'après la question précédente, $v \cdot v = 0$; et donc, par défini-positivité du produit scalaire, $v = 0$. On a bien montré $F \oplus G = \mathbb{R}^4$

4. (a) Matriciellement, $P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $p^2 = p \circ p = p$

(b) Un calcul matriciel donne $p(u_1) = 0, p(u_2) = u_2, p(u_3) = u_3$ et $p(u_4) = u_4$

(c) D'après ce qui précède, on en déduit que 0 est une valeur propre associée au vecteur propre u_1 et que 1 est une valeur propre associée aux vecteurs propres linéairement indépendants u_2, u_3 et u_4 .

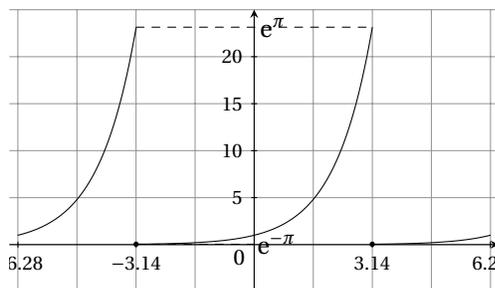
Les valeurs propres de p sont $\{0, 1\}$ et une base de vecteurs propres est donnée par (u_1, u_2, u_3, u_4)

(d) La matrice de passage est donc $V = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$ et la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) Tout d'abord, d'après la question 3.(b), on en déduit que les espaces vectoriels F et G sont orthogonaux. Ensuite d'après la question précédente, on reconnaît la matrice de a projection orthogonale sur G parallèlement à F . Finalement, p est la projection orthogonale sur G

Exercice 2

1. Voici la représentation graphique de la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$:



2. (a) $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ct} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{c} e^{ct} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{c\pi} - e^{-c\pi}}{2c\pi} = \frac{\text{sh}(c\pi)}{c\pi}$

(b) Calculons $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{ct} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{(c+in)t} dt = \left[\frac{1}{c+in} e^{(c+in)t} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{c-in}{c^2+n^2} (e^{c\pi} e^{in\pi} - e^{-c\pi} e^{-in\pi})$

$e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$, donc $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{ct} dt = \frac{(-1)^n c}{c^2+n^2} (e^{c\pi} - e^{-c\pi}) + i \frac{(-1)^{n+1} n}{c^2+n^2} (e^{c\pi} - e^{-c\pi})$

Pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) e^{ct} dt = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{ct} dt \right)$ soit $a_n = \frac{2(-1)^n c \text{sh}(c\pi)}{\pi(c^2+n^2)}$

(c) Pour $n \geq 1$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) e^{ct} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{ct} dt \right)$ soit $b_n = \frac{2(-1)^{n+1} n \operatorname{sh}(c\pi)}{\pi(c^2 + n^2)}$

3. (a) $\forall t \in]-\pi, \pi[$, $g(t) = \operatorname{ch}(ct)$ donc g est paire sur $]-\pi, \pi[$; par périodicité, on en déduit que g est paire

(b) Tout d'abord g est continue sur $]-\pi, \pi[$.

Montrons que g est continue en π : $\lim_{t \rightarrow \pi^-} g(t) = \operatorname{ch}(c\pi)$; par périodicité : $\lim_{t \rightarrow \pi^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow -\pi^+} g(t)$ et par parité, $\lim_{t \rightarrow -\pi^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow \pi^-} g(t) = \operatorname{ch}(c\pi)$; on a montré que $\lim_{t \rightarrow \pi^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow \pi^+} g(t)$ et donc que g est continue en π . Par périodicité, on en déduit que g est continue sur \mathbb{R}

(c) La fonction g est 2π -périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g converge en tout point t de \mathbb{R} vers $g(t)$

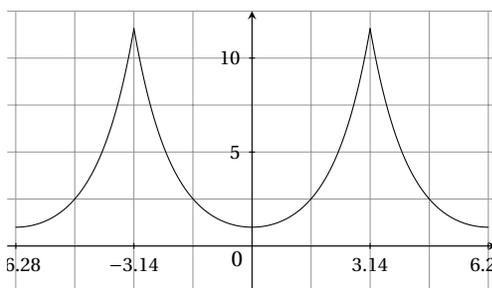
(d) Tout d'abord, g est paire donc $b_n = 0$; ensuite :

$$a'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t) + f(-t)}{2} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) dt; \text{ on effectue un changement de variable } x = -t \text{ dans la deuxième intégrale :}$$

$$a'_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{4\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x)(-dx) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \text{ et donc } a'_0 = a_0$$

Avec la même méthode, on montre que $a'_n = a_n$

4. (a) Voici la représentation graphique de la fonction g sur $[-2\pi, 2\pi]$:



(b) D'après la question 3.(c), on en déduit que $Sg(0) = g(0) = 1$; or

$$Sg(0) = \frac{\operatorname{sh}(c\pi)}{c\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n c \operatorname{sh}(c\pi)}{\pi(c^2 + n^2)} \cos(n \times 0) = \frac{\operatorname{sh}(c\pi)}{c\pi} + \frac{2c \operatorname{sh}(c\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{c^2 + n^2}; \text{ et donc}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{c^2 + n^2} = \frac{\pi}{2c \operatorname{sh}(c\pi)} - \frac{1}{2c^2}$$

(c) $Sg(\pi) = \operatorname{ch}(c\pi) = \frac{\operatorname{sh}(c\pi)}{c\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n c \operatorname{sh}(c\pi)}{\pi(c^2 + n^2)} \cos(n\pi) = \frac{\operatorname{sh}(c\pi)}{c\pi} + \frac{2c \operatorname{sh}(c\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c^2 + n^2}; \text{ et donc}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c^2 + n^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(c\pi)}{2c \operatorname{sh}(c\pi)} - \frac{1}{2c^2}$$

5. La fonction g est 2π -périodique et continue donc, d'après le théorème de Parseval, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge

$$\text{et } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g(t))^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (g(t))^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2.$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (g(t))^2 dt = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} (e^{2ct} + 2 + e^{-2ct}) dt = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2c} e^{2ct} + 2t - \frac{1}{2c} e^{-2ct} \right]_0^{\pi} = \frac{\operatorname{sh}(2c\pi)}{4c\pi} + \frac{1}{2}$$

L'égalité de Parseval s'écrit donc : $\frac{\text{sh}(2c\pi)}{4c\pi} + \frac{1}{2} = \frac{\text{sh}^2(c\pi)}{(c\pi)^2} + \frac{2c^2 \text{sh}^2(c\pi)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{c^2 + n^2} \right)^2$ et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{c^2 + n^2} \right)^2 = \frac{\pi \text{sh}(2c\pi)}{8c^3 \text{sh}^2(c\pi)} + \frac{\pi^2}{4c^2 \text{sh}^2(c\pi)} - \frac{1}{2c^4} = \frac{\pi \text{ch}(c\pi)}{4c^3 \text{sh}(c\pi)} + \frac{\pi^2}{4c^2 \text{sh}^2(c\pi)} - \frac{1}{2c^4}$$

Exercice 3

Partie A

1. Les exposants de x et de y étant pairs, il vient aisément $g(-x, y) = g(x, -y) = g(-x - y) = g(x, y)$

$g(-x, y) = g(x, y)$ implique que la surface est symétrique par rapport au plan d'équation $x = 0$

$g(x, -y) = g(x, y)$ implique que la surface est symétrique par rapport au plan d'équation $y = 0$

$g(-x, -y) = g(x, y)$ implique que la surface est symétrique par rapport à l'axe (Oz)

2. $p(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2 \times 2x \times (x^2 + y^2 - 3) = 4x(x^2 + y^2 - 3)$

3. $q(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2 \times 2y \times (x^2 + y^2 - 3) + 8y = 4y(x^2 + y^2 - 1)$

4. \diamond Si $x = 0$, le système devient $\begin{cases} 4y(y^2 - 1) = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y^2 = 1;$

dans ce cas, on obtient trois solutions : $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$

\diamond Si $y = 0$, le système devient $\begin{cases} 4x(x^2 - 3) = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 = 3;$

dans ce cas, on obtient à nouveau trois solutions : $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ et $(-\sqrt{3}, 0)$

\diamond Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, le système devient $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$ et ce système est incompatible.

Finalement ce système admet cinq couples solutions : $\{(0, 0), (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0), (0, 1), (0, -1)\}$

5. Par définition, $g(x, y)$ admet un point critique en (x, y) si $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right) = (0, 0)$; c'est-à-dire si

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 - 3) = 0 \end{cases} \text{ donc } g \text{ admet cinq points critiques : } \{(0, 0), (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0), (0, 1), (0, -1)\}$$

6. D'après le théorème de Schwarz, si g est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 alors $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

La fonction g est polynomiale en x et en y donc est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et vérifie donc les hypothèses du théorème de Schwarz.

7. (a) $r(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x(x^2 + y^2 - 3)) = 4(x^2 + y^2 - 3) + 4x \times 2x = 4(3x^2 + y^2 - 3)$

(b) $s(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4y(x^2 + y^2 - 1)) = 8xy$

(c) $t(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(4y(x^2 + y^2 - 1)) = 4(x^2 + y^2 - 1) + 4y \times 2y = 4(x^2 + 3y^2 - 1)$

8. \diamond En $(0, 0)$: $r = -12 < 0$ et $rt - s^2 = 48 > 0$; le point $(0, 0)$ est donc un maximum local

\diamond En $(\sqrt{3}, 0)$ et en $(-\sqrt{3}, 0)$: $r = 24 > 0$ et $rt - s^2 = 192 > 0$; les points sont donc des minimums locaux

\diamond En $(0, 1)$ et en $(0, -1)$: $r = -8 < 0$ et $rt - s^2 = -16 < 0$; les points sont donc des points cols

Partie B

1. Avec $(x, y) = (0, 1)$ l'égalité (*) devient $0 = (\alpha^2 + 1 - r^2)^2$, donc s'il existe de tels α et r alors $\alpha^2 + 1 - r^2 = 0$
2. Avec $(x, y) = (1, 0)$ l'égalité (*) devient $-4 = ((1 - \alpha)^2 - r^2)((1 + \alpha)^2 - r^2) = (\alpha^2 + 1 - r^2 - 2\alpha)(\alpha^2 + 1 - r^2 + 2\alpha)$, donc si de plus $\alpha^2 + 1 - r^2 = 0$, alors il vient $-4\alpha^2 = -4$.

S'ils existent, les réels positifs tels que la relation (*) soit vraie sont donc $\alpha = 1$ et $r = \sqrt{2}$

3. On développe les deux expressions :

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 - 3)^2 + 4y^2 - 8 &= x^4 + y^4 + 9 + 2x^2y^2 - 6x^2 - 6y^2 + 4y^2 - 8 \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 6x^2 - 2y^2 + 1 \\ ((x-1)^2 + y^2 - 2)((x+1)^2 + y^2 - 2) &= (x^2 + y^2 - 2x - 1)(x^2 + y^2 + 2x - 1) \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 6x^2 - 2y^2 + 1\end{aligned}$$

On a bien montré pour tout couple de réels (x, y) :

$$(x^2 + y^2 - 3)^2 + 4y^2 - 8 = ((x-1)^2 + y^2 - 2)((x+1)^2 + y^2 - 2)$$

4. $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow ((x-1)^2 + y^2 - 2)((x+1)^2 + y^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ (x+1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

On en déduit que l'ensemble des points vérifiant $g(x, y) = 0$ est la réunion du

cercle de centre $\Omega_1(1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ et du cercle de centre $\Omega_2(-1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$

De plus; la résolution du système donne les coordonnées des points d'intersection de ces deux cercles :

$$I_1(0, \sqrt{2}) \text{ et } I_2(0, -\sqrt{2})$$

Exercice 4

1. Voici la traduction du programme en langage Python :

```
def f(t):
    nb=0
    n=len(t)
    for i in range(1,n-1):
        if t[i]<t[i+1]:
            nb+=1
    return nb
```

L'appel $f(\text{Tableau1})$ renvoie 4; soit le nombre de séquence de 1 consécutifs présentes dans le tableau.

En effet le test $t[i] < t[i+1]$ est vérifié si deux éléments consécutifs du tableau sont 0 et 1; la variable nb est donc incrémenté de 1 à chaque début de séquence.

2. Pour plus de commodité, nous utiliserons deux fonctions : une première nommée $\text{longSeq}(t, i)$ qui prend en arguments un tableau t et un indice i et qui renvoie la longueur de la séquence (si elle existe) commençant à l'indice 1. Puis une deuxième fonction $g(t)$ qui renverra la position et la longueur de la plus longue séquence.

```
def longSeq(T, i):
    if T[i]==0:
        return 0
    long=1
    j=i+1
    while (j<len(T)) and (T[j]==1):
        long+=1
        j+=1
    return long
```

```
def g(T):
    L=3*[0]
    max, deb=0, 0
    for i in range(0, len(T)-1):
        if longSeq(T, i)>max:
            deb=i
            max=longSeq(T, i)
    L[0], L[1], L[2]=deb, deb+max-1, max
    return L
```

Pour le tableau donné la fonction $g(\text{Tableau1})$ renvoie $[2, 5, 4]$.