Concours ATS 2015. Mathématiques. Corrigé

Exercice 1

1. Pour écrire le système (SD) sous forme matricielle $X'(t) = A\,X(t)$, il suffit de poser $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Remarque. On peut auto-valider cette réponse en lisant la question qui suit …

2. (a) Le polynôme caractéristique de la matrice A est par définition :

$$P_A(x) = \det(A - X\,I_3) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & -1 \\ 2 & -1-X & -2 \\ 2 & 1 & -4-X \end{vmatrix}.$$

En remplaçant le première colonne par la somme des trois colonnes, on a

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & -1 \\ -1-X & -1-X & -2 \\ -1-X & 1 & -4-X \end{vmatrix} \text{ donc } P_A(x) = (-1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1-X & -2 \\ 1 & 1 & -4-X \end{vmatrix}.$$

En soustrayant la première ligne aux deux autres :

$$P_A(x) = (-1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2-X & -1 \\ 0 & 0 & -3-X \end{vmatrix} = (-1-X)(-2-X)(-3-X)$$

2. (b). Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique. Donc on résout $P_A(x) = 0$ qui équivaut à $(-1-X)(-2-X)(-3-X) = 0$. Donc les valeurs propres sont bien -1, -2 et -3.

Remarque. Si on a calculé le polynôme avec la règle de Sarrus, et donc obtenu un polynôme développé de degré 3, on peut argumenter de la manière suivante : en tant que polynôme de degré 3, le polynôme caractéristique a au plus trois racines distinctes deux à deux. Or on vérifie par calcul que les valeurs -1, -2 et -3 annulent ce polynôme, donc ce sont ***les*** *racines du polynôme caractéristique et donc* ***les*** *valeurs propres.*

3. (a) Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est $E_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3)$. Pour le déterminer, on résout donc le système :

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}.$$

Donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On peut donc prendre comme vecteur propre $v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. (b) Le sous-espace propre associé à la valeur propre -2 est $E_{-2} = \mathrm{Ker}(A + 2\,I_3)$. Pour le déterminer, on résout donc le système :

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}. \text{ Donc } E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

3. (c) Le sous-espace propre associé à la valeur propre -3 est $E_{-3} = \text{Ker}\left(A + 3I_3\right)$. Pour le déterminer, on résout donc le système :

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}. \text{ Donc } E_{-3} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

4. (a) et (b) La matrice A d'ordre 3 ayant 3 valeurs propres distinctes est donc diagonalisable, c'est-à-dire qu'elle est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$, où on a mis sur la diagonale les valeurs propres, avec la matrice de passage $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, où on a mis en colonnes les vecteurs propres trouvés plus haut. On a alors $D = P^{-1}AP$ ou $A = PDP^{-1}$.

4. (c) *Remarque. Dans la mesure où on nous donne la réponse, pour expliciter la matrice* P^{-1} *il n'est pas nécessaire d'appliquer la méthode usuelle. Mais si on veut , on peut ! ...*

On sait que s'il existe une matrice B telle que $P.B = I_3$ alors P est inversible et $B = P^{-1}$. On calcule donc

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Par exemple le premier "1" s'obtient par $1\times1+1\times0+0\times(-1) = 1$ *, et le "0" de la première colonne deuxième ligne par* $1\times1+0\times0+1\times(-1) = 0$.

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Remarque. On a intérêt à faire tous les calculs au brouillon pour « vérifier » les résultats des questions précédentes.

5. (a) On a $X(0) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ donc $U(0) = P^{-1}.X(0) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$. Donc $u(0) = 2$, $v(0) = -1$ et $w(0) = 0$.

5. (b) En partant de $X'(t) = AX(t)$, vu que $X(t) = PU(t)$ et donc $X'(t) = PU'(t)$ (les coefficients de la matrice P étant constants), on a $PU'(t) = APU(t)$ donc $U'(t) = P^{-1}APU(t)$ donc $U'(t) = DU(t)$, puisque $D = P^{-1}AP$.

Remarque. On peut bien sur faire dans l'autre « sens » : $X'(t) = AX(t)$ *donc* $X'(t) = PDP^{-1}X(t)$ *donc* $P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t)$ *etc.*

5. (c) Le système $U'(t) = D\,U(t)$ est équivalent à $\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = -2\,v(t) \\ w'(t) = -3\,w(t) \end{cases}$ (avec $t \in \mathbb{R}$) qui se résout immédiatement :

$$\begin{cases} u(t) = C_1\,e^{-t} \\ v(t) = C_2\,e^{-2t} \\ w(t) = C_3\,e^{-3t} \end{cases}$$ sur $\mathbb{R}$, où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes réelles arbitraires.

Avec les conditions (« initiales »), $u(0) = 2$, $v(0) = -1$ et $w(0) = 0$, on en déduit tout aussi immédiatement : $C_1 = 2$, $C_2 = -1$ et $C_3 = 0$.

Donc la solution cherchée est $U(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ (avec $t \in \mathbb{R}$).

5. (c) Donc la solution de (SD) avec les conditions initiales (CI) est $X(t) = P\,.\,U(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$, soit

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-t} \\ 2e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix}$$ (avec $t \in \mathbb{R}$).

Remarque. On peut vérifier en remplaçant dans le système (SD) et les conditions (CI) …

Exercice 2

1. $f(0) = e^{0^2} \int_0^0 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

2. Soit x un réel quelconque ; $f(-x) = e^{(-x)^2} \int_0^{-x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. En faisant le changement de variable $t = -u$ dans l'intégrale $\int_0^{-x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, on a $\int_0^{-x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{x} e^{-(-u)^2}\,\mathrm{d}u = -\int_0^{x} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$; donc $f(-x) = -f(x)$.

Remarque.On pouvait aussi argumenter en disant que la fonction à intégrer dans $\int_0^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ étant paire, on a directement $\int_0^{-x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

On en déduit que la fonction *f* est impaire.

3. *Remarque. A priori, on ne demande pas de justifier que la fonction h est dérivable sur* $\mathbb{R}$ …

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, *h* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout *x* appartenant à $\mathbb{R}$, $h'(x) = e^{-x^2}$.

4. (a) *f* en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout *x* réel :

$$f'(x) = 2x\,.\,e^{x^2}\,h(x) + e^{x^2}\,h'(x) = 2x\,.\,e^{x^2} \int_0^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + 1\,.$$

4. (b) $f'(0) = 1$.

4. (c) Vu le (a), on a $f'(x) - 2x.f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$, donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 2x.y = 1$.

5. (a) On se sert du résultat de la question 4. (a).

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant positive sur $\mathbb{R}$, $\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est positif si x est positif et négatif si x est négatif ; il en résulte que $x.e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est positif si x est négatif ou positif (c'est nul pour x nul). Donc $f'(x)$ est positif quel que soit le réel x. On en déduit que f est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$.

5. (b) Dire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. De plus, vu les propriétés de la fonction exponentielle, cette limite est positive donc puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5. (c)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6. On pose $u_p(x) = \dfrac{2^{2p}\,p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}$ avec p entier naturel et x réel.

Pour x non nul, $\left|\dfrac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right| = \dfrac{2^{2p+2}\,(p+1)!}{(2p+3)!}.\dfrac{(2p+1)!}{2^{2p}\,p!}\left|x^2\right| = \dfrac{2^2\,(p+1)}{(2p+3)(2p+2)}\left|x^2\right| = \dfrac{2}{2p+3}\left|x^2\right|$.

Donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left|\dfrac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right| = 0$, donc, d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum\limits_{p\geqslant 0}\dfrac{2^{2p}\,p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}$ est absolument convergente quel que soit le réel x, donc la rayon de convergence est $+\infty$.

7. *Remarque. A nouveau, a priori, on ne demande pas de justifier la dérivabilité de g …*

En tant que somme d'une série entière la fonction g est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence, et donc ici sur $\mathbb{R}$, avec pour tout réel x, $g'(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{2^{2p}\,p!}{(2p+1)!}(2p+1)\,x^{2p} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{2^{2p}\,p!}{(2p)!}x^{2p}$.

Remarque. Vu l'énoncé, on pouvait répondre en écrivant :

$$g'(x) = 1+\frac{4}{6}.3x^2+\ldots+\frac{2^{2p}\,p!}{(2p+1)!}(2p+1)x^{2p}+\ldots = 1+2x^2+\ldots+\frac{2^{2p}\,p!}{(2p)!}x^{2p}+\ldots.$$

8. On remarque que $2x\,g(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{2^{2p+1}\,p!}{(2p+1)!}x^{2p+2}$.

Pour pouvoir soustraire avec la série obtenue ci-dessus donnant $g'(x)$, on « re-indice » en posant $q = p+1$:

$$2\,x\,g(x)=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{2^{2(q-1)+1}\,(q-1)!}{(2(q-1)+1)!}\,x^{2(q-1)+2}=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{2^{2q-1}\,(q-1)!}{(2q-1)!}\,x^{2q}\ .$$

Donc étant donné que $(2\,q)!=(2q-1)!.(2\,q)$, on peut écrire :

$$2\,x\,g(x)=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{2^{2q-1}\,(q-1)!\;2q}{(2q)!}\,x^{2q}=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{2^{2q}\,q!}{(2q)!}\,x^{2q}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2^{2p}\,p!}{(2\,p)!}\,x^{2p}\ .$$

Donc $g'(x)-2\,x\,g(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2^{2p}\,p!}{(2\,p)!}\,x^{2p}-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2^{2p}\,p!}{(2\,p)!}\,x^{2p}=1$. C.Q.F.D.

9. L'équation différentielle $y'-2x.y=1$ étant une équation différentielle du 1° ordre linéaire de la forme $y'+a(x).y=b(x)$ avec les fonction *a* et *b*, respectivement définies par $a(x)=-2x$ et $b(x)=1$, continues sur $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe une et une seule solution vérifiant une condition initiale donnée.

Or *f* et *g* vérifient cette équation différentielle et $f(0)=g(0)=0$. Donc $f=g$.

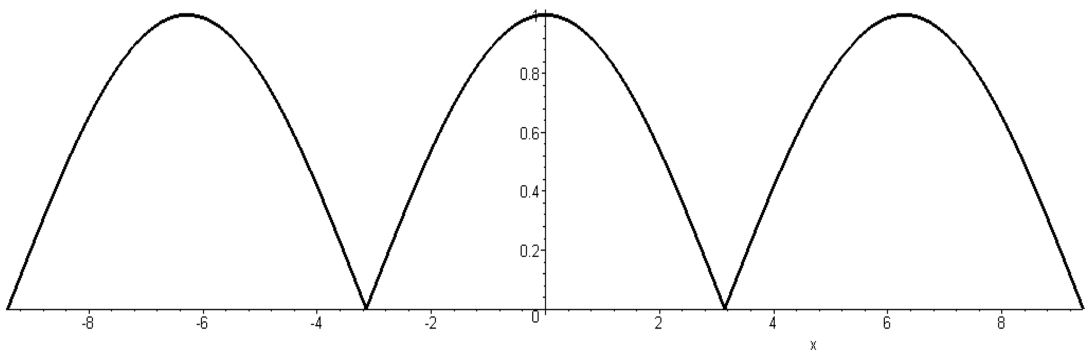
Exercice 3

1. *Remarque. La fonction f,* 2π *-périodique, est donnée sur l'intervalle fermé* $[-\pi,\pi]$*. On peut donc considérer qu'il est implicite que* $f(-\pi)=f(\pi)$ *(ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement), ce qui assure la continuité de f en* π *et donc sur* $\mathbb{R}$ *.*

La fonction *f* étant 2π -périodique, il suffit d'étudier la parité de *f* sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ qui est de longueur 2π . Or sur cet intervalle $f(-t)=\cos(u(-t))=\cos(-u\,t)=f(t)$, vu la parité de la fonction cosinus. Donc *f* est paire.

Remarque. Dans la mesure où le « graphe » est donné, il me semble que l'argumentation graphique qui consiste à dire que celui-ci admettant l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, la fonction f est paire, est recevable.

2.



3. (a) *Remarque. Même si l'énoncé le donne implicitement, on peut remarquer que la fonction f étant 2 π-périodique, la pulsation est* $\omega=1$.

$$a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}cos(u\,t)\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{u}\,sin(u\,t)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{sin(\pi\,u)}{\pi\,u}\ .$$

Remarque. A priori, on n'a pas besoin de la parité pour faire les calculs des coefficients de Fourier.

Pour tout entier n non nul, $a_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos(ut).cos(nt)\,\mathrm{d}t$, donc avec la formule de trigonométrie rappelée, on linéarise en :

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(cos((u+n)t)+cos((u-n)t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{u+n}\,sin((u+n)t)+\frac{1}{u-n}\,sin((u-n)t)\right]_{-\pi}^{\pi}\text{, donc}$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{u+n}\,sin((u+n)\pi)+\frac{1}{u-n}\,sin((u-n)\pi)\right).$$

On peut remarquer que u étant un réel compris entre 0 et 1, $u+n$ *et* $u-n$ *ne s'annulent pas.*

Or $sin((u+n)\pi) = (-1)^n sin(u\pi)$ et $sin((u-n)\pi) = (-1)^n sin(u\pi)$, donc

$$a_n(f) = \frac{(-1)^n\,sin(u\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{u+n}+\frac{1}{u-n}\right) = \frac{(-1)^n\,sin(u\pi)}{\pi}\,\frac{2u}{u^2-n^2}.$$

3. (b) La fonction f étant paire, pour tout entier n non nul, $b_n(f) = 0$.

3. (c) Donc la série de Fourier de f s'écrit $\frac{sin(\pi u)}{\pi u} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\,2u\,sin(u\pi)}{\pi(u^2-n^2)}\,cos(nt)$.

4. (a) La fonction f vérifie bien les conditions de Dirichlet (périodique et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$) donc la série de Fourier converge quel que soit le réel t.

De plus, vu la continuité de f sur $\mathbb{R}$, pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$, $f(t) = \frac{sin(\pi u)}{\pi u} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,2u\,sin(u\pi)}{\pi(u^2-n^2)}\,cos(nt)$.

4. (b) Vu la question précédente et vu l'énoncé :

$$Sf(\pi) = \frac{sin(\pi u)}{\pi u} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,2u\,sin(u\pi)}{\pi(u^2-n^2)}\,cos(n\pi) = f(\pi) = cos(u\pi)\text{, donc}$$

$$\frac{sin(\pi u)}{\pi u} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2u\,sin(u\pi)}{\pi(n^2-u^2)} = cos(u\pi).$$

5. (a) f étant périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (car continue !), d'après le théorème de Parseval, on peut dire que la série $\frac{sin^2(\pi u)}{\pi^2u^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{4u^2\,sin^2(u\pi)}{\pi^2(u^2-n^2)^2}$ converge et que $\frac{sin^2(\pi u)}{\pi^2u^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4u^2\,sin^2(u\pi)}{\pi^2(u^2-n^2)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Or avec $u = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos^2(t/2)\,\mathrm{d}t$ que l'on linéarise encore avec la formule rappelée (si on a oublié les formules de duplication …) avec $a = b = t/2$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(1 + cos(t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\,[t+sin(t)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Remarque. Un résultat classique d'élec. valide ce résultat …

De plus, $\frac{sin^2(\pi u)}{\pi^2u^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4u^2\,sin^2(u\pi)}{\pi^2(u^2-n^2)^2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2}$.

Donc . $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4n^2-1}\right)^2=\frac{\pi^2-8}{16}$.

Remarque. La convergence de la série étudiée est donc obtenue de fait.

Exercice 4

1. Les coordonnées d'un vecteur tangent à la parabole au point A sont $\begin{pmatrix}1\\2a\end{pmatrix}$.

2. Il en résulte qu'un vecteur normal à la tangente à la parabole en A, compris comme normal à un vecteur directeur de la tangente, a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2a\\1\end{pmatrix}$.

Donc une équation de la normale à la parabole en A est donnée par :

$$\begin{vmatrix}x-a & -2a\\ y-a^2 & 1\end{vmatrix}=0 \text{ qui équivaut à } (x-a)+2a(y-a^2)=0 .$$

Donc une une équation de la normale à la parabole en A est $x+2ay-a-2a^3=0$.

Remarque. On pouvait aussi faire avec la notion de produit scalaire ...

3. Les coordonnées (x,y) des points d'intersection de la parabole et de la droite déterminée à la question précédente sont les solutions du système : $\begin{cases}x+2ay-a-2a^3=0\\ y=x^2\end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases}2ax^2+x-a-2a^3=0\\ y=x^2\end{cases}$.

Le discriminant de l'équation du second degré *(rappel : a est non nul)* en x est $\Delta=1+8a^2+16a^4=(1+4a^2)^2$, donc les solutions sont $\dfrac{-1\pm(1+4a^2)}{4a}$, soit a et $-a-\dfrac{1}{2a}$. C.Q.F.D.

4. (a) Pour tout réel x non nul, $h'(x)=-1+\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{1-2x^2}{2x^2}$.

La fonction h est impaire (pour tout réel x non nul, $h(-x)=x+\dfrac{1}{2x}=-h(x)$), donc il suffit d'étudier les variations sur $]0;+\infty[$.

Or pour x positif, $h'(x)>0$ équivaut à $1-2x^2>0$ qui équivaut à $x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Directement, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=-\infty$. Et par imparité (ou directement!), $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=+\infty$.

D'où le tableau de variation de h sur $]0;+\infty[$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$	||	positif	0	négatif	
h	||	$-\infty$ ↗	$-\sqrt{2}$	↘	$-\infty$

La fonction h a donc un maximum relatif en $\frac{\sqrt{2}}{2}$, celui-ci étant égal à $-\sqrt{2}$. Par imparité, h a un minimum relatif en $\frac{-\sqrt{2}}{2}$, celui-ci étant égal à $\sqrt{2}$.

4. (b) et (c) *Remarque. On ne sait pas trop quelle justification est attendue, notamment vu la question 5 (a). Disons ...*

En application du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction h étant continue sur $]0\,;+\infty[$ et vu le tableau de variation, l'image par h de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est l'intervalle $]-\infty\,;-\sqrt{2}]$. Vu l'imparité, par symétrie, l'image par h de l'intervalle $]-\infty\,,0[$ est l'intervalle $[\sqrt{2}\,;+\infty[$.

Donc l'image par h de $\mathbb{R}^*$ est $]-\infty\,;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2}\,;+\infty[$.

Donc $\alpha=-\sqrt{2}$ et $\beta=\sqrt{2}$.

5. (a) On envisage deux cas : $b\in\,]-\infty\,;-\sqrt{2}[$ et $b\in\,]\sqrt{2}\,;+\infty[$

Si $b\in\,]-\infty\,;-\sqrt{2}[$,vu la continuité et la (stricte) croissance de h sur $\left]0\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, en application du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un et un seul nombre $a_1\in\left]0\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ tel que $b=h(a_1)$; de même vu la continuité et la (stricte) décroissance de h sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}\,;+\infty\right[$, en application toujours du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un et un seul nombre $a_2\in\left]\frac{\sqrt{2}}{2}\,;+\infty\right[$ tel que $b=h(a_2)$; comme les intervalles $\left]0\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}\,;+\infty\right[$ sont disjoints, on a bien exactement deux nombres réels distincts a_1 et a_2 tels que $b=h(a_1)=h(a_2)$.

Par imparité, on a de même pour $b\in\,]\sqrt{2}\,;+\infty[$.

5. (b) $b=h(a)$ équivaut à $b=-a-\frac{1}{2a}$ qui équivaut à $2a^2+2ba+1=0$.

5. (c) Le discriminant de cette équation est $\Delta=4b^2-8$, donc $a=\frac{-2b\pm2\sqrt{b^2-2}}{4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-2}}{2}$, ce qui donne les deux valeurs de a_1 et a_2.

5. (d) Si $b=\pm\sqrt{2}$, on constante que l'on a une solution « double », ce qui est normal vu l'étude des variations.

6. (a) Les coordonnées du milieu du segment $[A_1A_2]$ sont respectivement :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-2}}{2}+\frac{-b-\sqrt{b^2-2}}{2}\right)=-\frac{b}{2} \text{ et } \frac{1}{2}\left(\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-2}\right)^2}{4}+\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-2}\right)^2}{4}\right)=\frac{b^2-1}{2}.$$

6. (b) Les coordonnées d'un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{A_1 A_2}$ sont respectivement :

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-2}}{2}-\frac{-b-\sqrt{b^2-2}}{2}=\sqrt{b^2-2} \text{ et } \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-2}\right)^2}{4}-\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-2}\right)^2}{4}=-b\sqrt{b^2-2}$$

qui est bien colinéaire au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées respectives 1 et -*b*.

6. (c) Une équation de la droite passant par *I* et de vecteur directeur $\vec{u}$ est donnée par $\begin{vmatrix} x+\frac{b}{2} & 1 \\ y-\frac{b^2-1}{2} & -b \end{vmatrix}=0$, soit $bx+y+\frac{1}{2}=0$.

6. (d) En mettant l'équation précédente sous la forme $y=-bx-\frac{1}{2}$, on voit que toutes ces droites coupent l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

6. (e) *Remarque. A priori la question est incongrue puisque depuis le début de cette question 6 on suppose que b est différent de* α *et de* β. *En fait, on doit comprendre : « Que remarque-t-on si on fait tendre b vers* α, *ou vers* β *? »*

Si *b* tend vers α, les points A_1 et A_2 « tend » vers le point de coordonnées $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$ et donc la droite Δ devient la tangente à la parabole en ce point *(ce qui permet une vérification ...)*.

De même avec β.