Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

On pose pour k entier naturel, $I_k = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2k}\, d\theta$ et $J_k = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2k} (\cos\theta)^2\, d\theta$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que pour tout $k > 0$, $I_{k-1} - I_k = J_{k-1}$.

3) Avec une intégration par parties, montrer que pour tout $k > 0$ $J_{k-1} = \dfrac{1}{2k-1} I_k$. En déduire la relation de récurrence (R) $I_k = \dfrac{2k-1}{2k} I_{k-1}$.

4) Démontrer par récurrence que pour tout $k > 0$ $I_k = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$ [On précisera bien les hypothèses de la démonstration par récurrence]

On pose $u_n = \ln(I_n)$.

5) Démontrer, à partir de la relation de récurrence (R), que pour tout entier $n>0$: $u_n = u_{n-1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{2k}\right)$

6a) Étudier la fonction h définie par $h(x) = \ln(1+x) - x$ sur $]-1,0]$. Donner son signe.

6b) Montrer que pour tout entier $k > 0$, $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2k}\right) < \dfrac{-1}{2k} < 0$.

6c) Donner $\lim_{n\to\infty} u_n$, puis $\lim_{n\to\infty} I_n$.

7) On pose $S_n(x,\theta) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} (x\sin\theta)^{2k}$ et $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$

Montrer que $g_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S_n(x,\theta)\, d\theta$.

8) Donner le rayon de convergence de la série entière $g(x) = \sum_{0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta))\, d\theta$. [Remarque : ne pas chercher à calculer cette intégrale]

9a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus et donner son rayon de convergence.

9b) En utilisant ce développement dans φ, en déduire que

$$|\varphi(x) - g_n(x)| \le \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2n} d\theta\right) R_n(x) \quad \text{avec} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} .$$

10a) Donner le développment en série entière de la fonction cosinus hyperbolique (ch) et donner son rayon de convergence.
10b) En déduire que pour tout réel x, $R_n(x) \leq \mathrm{ch}(x)$, puis que $|\varphi(x) - g_n(x)| \leq ch(x) I_n$.
11) En déduire que pour tout réel x , $g(x) = \varphi(x)$.

Exercice 2

Soient deux réels positifs a et p avec $p>0$.

1) Sachant que $\sin(ax) = \mathrm{Im}(e^{iax})$, montrer que $\int_0^{\infty} e^{-px}\sin(ax)dx = \dfrac{a}{a^2+p^2}$

On pose $f(a,p) = \dfrac{a}{a^2+p^2}$

2a) Soit $F(p) = \int_0^{\pi/2} f(\sin(\theta), p)\, d\theta$. En posant $t = \dfrac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+p^2}}$, montrer que $F(p) = G(p)\int_a^b \dfrac{dt}{1-t^2}$ en précisant $G(p)$ et les bornes a,b de l'intégrale.

2b) Déterminer A et B tels que pour tout réel différent de +1 et -1, $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{A}{1-t} + \dfrac{B}{1+t}$.

2c) En déduire par intégration la valeur de $F(p)$.

Exercice 3

Soit un espace vectoriel E de dimension 3 de base $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et f un endomorphimse dont la matrice **A** dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1a) Donner le polynôme caractéristique de la matrice **A**.
1b) Montrer que f a deux valeurs propres, λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 > \lambda_2$. [Indication : on vérifiera que $\lambda_1 = 2$ est la plus grande des valeurs propres]
2) Déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tels que $(\vec{u})$ est une base du sous-espace propre $\mathcal{U}_{\lambda_1}$ et $(\vec{v})$ une base du sous-espace propre $\mathcal{U}_{\lambda_2}$.
3) Pourquoi la matrice **A** n'est elle pas diagonalisable ?

4a) Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\right)$ est une base de E. [$\vec{k}$ est de composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$].

4b) Calculer les composantes de $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{k})$ dans la base $\mathcal{B}$

4c) Calculer les composantes de $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{k})$ dans la base $\mathcal{B}'$

4d) Montrer que dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de f est de la forme: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en précisant α .

5) Calculer $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{B}^3$. En déduire une formule pour $\mathbf{B}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cette formule sera démontrée par récurrence.
6) Donner la matrice de passage **P** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, puis calculer $\mathbf{P}^{-1}$.

7) Montrer que $\mathbf{B}$ est inversible. Calculer $\mathbf{B}^{-1}$. Démontrer que la formule trouvée au 5) est valable pour $n \in \mathbb{Z}$. [On note $\mathbf{B}^{-p} = \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^p$]

8) En déduire l'expression de $\mathbf{A}^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct$\left(O;\vec{i}\ ,\vec{j}\right)$. On considère la courbe C de représentation paramétrique $M(t) = \left(x(t), y(t)\right)$ définie par:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)\ \sin^2(t) \\ y(t) = \ \sin(t)\ \cos^2(t) \end{cases}$$

1) Justifier qu'il suffit de prendre le paramètre t dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour étudier toute la courbe.

2a) Comparer $M(-t)$ avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.

2b) Comparer $M(\pi - t)$ avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.

2c) Comparer $M\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.

3) Proposer un intervalle d'étude I qui tienne compte des symétries précédemment trouvées. Préciser par quelles symétries successives on obtient la courbe C à partir du tracé obtenu pour $t \in I$

4) Calculer les dérivées de x et y et montrer qu'elles peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} x'(t) = \sin t\left(3\cos^2 t - 1\right) \\ y'(t) = \cos t\left(1 - 3\sin^2 t\right) \end{cases}$$

Étudier les variations des fonctions x et y et dresser leur tableau de variation conjoint sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. On notera t_0 le réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ tel que $\sin t_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5) Préciser les coordonnées de $M(0)$, $M(t_0)$ et $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ainsi que les vecteurs tangents en ces points

6) Tracer en gras la partie de la courbe C pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et en pointillés la partie complétée par les transformations géométriques que l'on précisera.

7) Montrer que si (ρ, θ) sont les coordonnées polaires d'un point de la courbe C, on a $4\rho^2 = \sin^2(2\theta)$

8) En déduire que la courbe C est inscrite dans un disque de centre O et d'un rayon à préciser.