Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Pour b et t strictement positifs, on considère les fonctions F et I définies par :
$F(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}e^{-tx}dx$, et $I(b)=\int_0^{b}\frac{\sin(x)}{x}dx$

1) a- Que vaut $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$? Justifier que F et I sont définies sur $\mathbb{R}_*^+$.

b- Montrer que $\forall x\geq 0, |\sin x|\leq x$. En déduire que $|F(t)|\leq\frac{1}{t}$, puis calculer $\lim_{t\to\infty}F(t)$.

2) On admet que F' peut se calculer en dérivant sous l'intégrale et donc que $F'(t)=\int_0^{\infty}-\sin(x)e^{-tx}dx$ pour $t>0$. Montrer que $F'(t)=\frac{-1}{1+t^2}$.
En déduire la valeur de $F(t)$ pour $t>0$, en utilisant la limite trouvée au 1)b

3) a- Donner le développement en série entière de $\frac{\sin(x)}{x}$.

b- Montrer par récurrence que $\forall n\geq 0, \int_0^{\infty}u^n e^{-u}du=n!$

c- On admet que pour t>1 on peut intégrer terme à terme le développement en série obtenu dans l'intégrale définissant $F(t)$. En déduire que si t>1 on a :

$$F(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)t^{2k+1}}$$

d- Comment retrouver ce résultat à partir de l'expression de $F(t)$ obtenue en 2) ?

4) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{\sin(x)}{x}dx$ existe.

On posera alors : $F(0)=\lim_{b\to\infty}I(b)=\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$.

5) On admet que F est continue en 0. En déduire la valeur de $F(0)$.

6) Montrer que $|I((n+1)\pi)-I(n\pi)|\geq\frac{2}{(n+1)\pi}$. En déduire que $\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx$ diverge.

Exercice 2

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, soit P la parabole d'équation cartésienne $y^2 = 4x$ de représentation paramétrique pour $u\in\mathbb{R}$
$u\mapsto M(u)=\left(x(u),y(u)\right)=\left(u^2,2u\right)$

1.a. Donner un vecteur directeur $\vec{t}(u)$ de la tangente au point $M(u)$ à la parabole P.

1.b. Donner un vecteur directeur $\vec{n}(u)$ de la normale au point $M(u)$ à la parabole P.
1.c- Écrire une équation cartésienne de la tangente $\mathrm{T}(u)$ au point $M(u)$.
2. On se donne le point $A(a,0)$ de l'axe des abscisses. Donner un vecteur directeur de la droite contenant A et orthogonale à $\mathrm{T}(u)$. Calculer les coordonnées de $H(u)$, projection orthogonale de $A(a,0)$ sur $\mathrm{T}(u)$. On notera $(X(u),Y(u))$ les coordonnées de $H(u)$. (Ces coordonnées dépendent du paramètre a)
On appelle C_a la courbe de représentation paramétrique $u \mapsto H(u) = (X(u),Y(u))$
3. Montrer que la courbe C_a admet la même asymptote Δ_a (dépendant de a) quand u tend vers $+\infty$ et quand u tend vers $-\infty$, et donner cette asymptote.
4. Montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que C_a est une droite. Préciser la valeur de a et la droite trouvée.
On choisit maintenant $a=0$, c'est-à-dire que le point A est choisi à l'origine O du repère.
5. Faire une étude et un tableau de variation conjoint de $X(u)$ et de $Y(u)$. En déduire que la courbe C_0 admet une tangente en $H(u)$ ayant un vecteur directeur de composantes $\left(-2,u\left(3+u^2\right)\right)$. Préciser la nature du point $H(0)$.
6. Représenter sur une même figure la parabole P, la courbe C_0, l'asymptote Δ_0.

Exercice 3

On pose pour tout couple d'entiers naturels (n, p) : $I_p(n) = \int_0^\pi x^p \cos(2nx)dx$

1. Calculer $I_p(0)$. Montrer que pour $n>0$, $I_0(n)=0$, $I_1(n)=0$, $I_2(n)=\dfrac{\pi}{2n^2}$.

f est une fonction π-périodique telle que : $\forall x \in [0,\pi[,\ f(x)=\alpha x^2+\beta x$

On fait l'hypothèse qu'il existe deux réels α,β tels que le développement en série de Fourier de f est : $S_f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}\cos(2nx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx)$

2.a) Déterminer les conditions sur α,β telles que $a_0 = \dfrac{\pi^2}{6}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{-1}{n^2}$.
b) Déterminer les valeurs de α,β qui répondent à ces conditions.
c) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-\pi,+\pi]$.
d) Soit $x \in]-\pi,0[$, on a donc $-x \in]0,\pi[$ et aussi $\pi + x \in]0,\pi[$. Montrer pour les valeurs de α et β trouvées à la question *2.a.* $f(-x) = f(\pi+x)$.
e) En déduire que la fonction f est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

3. Que peut-on en déduire pour les coefficients b_n.
4. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) = S_f(x)$, en énonçant le théorème qui le justifie.
5. Déduire du résultat précédent la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

6. Déduire d'un des résultats précédents la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ et de $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$.

7. Appliquer le théorème de Parseval et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Exercice 4

Dans un espace vectoriel E de dimension 3 on considère l'endomorphisme f de matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dans E, l'application identique *id* a pour matrice **I**.

L'objet de l'exercice est de déterminer toutes les matrices **M** telles que $\mathbf{M}^2=\mathbf{A}$.

1. Montrer que ker f est de dimension 1 et déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de ker f de la forme : $\vec{u}=\vec{j}+a\vec{k}$ [on calculera a].

2. Calculer le polynôme caractéristique de **A**.Déterminer ses racines.

3. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre non nulle de **A**. Montrer qu'il est de dimension 1 et qu'il est engendré par un vecteur de la forme $\vec{v}=\vec{j}+b\vec{k}$ [on calculera b].

4. La matrice **A** est elle diagonalisable? Expliquer pourquoi.

5.a) Montrer que $\mathcal{B}'=(\vec{u},\vec{v},\vec{i})$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice **B** de f dans la base $\mathcal{B}'$.

c) Déterminer la matrice de passage **P** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse $\mathbf{P}^{-1}$.

d) Donner une relation entre **A**, **P** et **B**.

Soit **M** une matrice telle que $\mathbf{M}^2=\mathbf{A}$.

On note g l'endomorphisme de matrice **M** dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $g\circ g=f$

6. a) Montrer que l'on a $f\circ g=g\circ f$.

b) Calculer de deux manières $f\circ g(\vec{u})$ et $f\circ g(\vec{v})$. En déduire que $g(\vec{u})=\vec{0}$ et qu'il existe un réel x tel $g(\vec{v})=x\vec{v}$.

c) En déduire que l'on a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0 & 0 & s\\ 0 & x & t\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$.

d) Déterminer les deux valeurs possibles de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ puis de **M**.