Corrigé

Exercice 1 Pour b et t strictement positifs, on considère les fonctions F et I définies par :

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, e^{-tx}\, dx\ , \quad \text{et} \quad I(b) = \int_0^b \frac{\sin(x)}{x}\, dx\ .$$

1. (a) Le développement limité de sinus en 0 donne : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est donc prolongeable par continuité en 0, et l'intégrale $I(b)$ est bien définie pour tout b strictement positif. Pour étudier $F(t)$, on regarde séparément $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, e^{-tx}\, dx$ et $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, e^{-tx}\, dx$. Le prolongement par continuité de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ en 0 montre que la première intégrale est convergente. Pour la seconde intégrale, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est bornée sur $[1\ ;\infty[$, et l'intégrale $\int_1^\infty e^{-tx}\, dx$ vaut $\frac{e^{-t}}{t}$; en conclusion F est bien définie pour tout t strictement positif.

   (b) Soit $x \geq 0$. L'inégalité demandée découle de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction sinus sur l'intervalle $[0\ ; x]$. On en déduit que :

$$|F(t)| \leq \int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| e^{-tx}\, dx \leq \int_0^\infty e^{-tx}\, dx = \frac{1}{t}\ .$$

   Ensuite, le théorème d'encadrement donne : $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

2. Soit $t > 0$. On admet que :

$$F'(t) = \int_0^\infty -\sin(x)\, e^{-tx}\, dx\ .$$

   En faisant deux intégrations par parties successives dans lesquelles on dérive la fonction exponentielle, on arrive à :

$$F'(t) = -1 - t^2 F'(t)\ ,$$

   ce qui donne donc :

$$\forall t \in]0\ ;\infty[, \quad F'(t) = \frac{-1}{1+t^2}\ .$$

   Il existe donc un réel K tel que :

$$\forall t \in]0\ ;\infty[, \quad F(t) = -\arctan(t) + K\ .$$

   En utilisant le fait que F tend vers 0 en ∞, on en déduit que K vaut $\frac{\pi}{2}$. Ainsi on a montré que :

$$\forall t \in]0\ ;\infty[, \quad F(t) = -\arctan(t) + \frac{\pi}{2}\ .$$

3. (a) La fonction sinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}\ .$$

   En divisant par x non nul, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k}\ .$$

   (b) Pour initialiser la récurrence, avec $n = 0$ on a $\int_0^\infty e^{-u}\, du = 1$, et $0! = 1$.
   Pour l'hérédité, une intégration par parties dans laquelle on dérive la fonction puissance montre que :

$$\int_0^\infty u^{n+1}\, e^{-u}\, du = (n+1) \int_0^\infty u^n\, e^{-u}\, du\ .$$

   On en déduit le résultat demandé.

(c) Soit $t > 1$. On admet qu'on peut intégrer terme à terme le développement en série entière obtenu ci-dessus :

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, e^{-tx}\, dx \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^\infty x^{2k}\, e^{-tx}\, dx \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^\infty \frac{u^{2k}}{t^{2k+1}}\, e^{-u}\, du \quad \text{(changement de variable } u = tx\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\, t^{2k+1}} \underbrace{\int_0^\infty u^{2k}\, e^{-u}\, du}_{=(2k)! \text{ d'après (3b)}} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)\, t^{2k+1}} .
\end{aligned}$$

(d) Dans la question 2, on a obtenu :

$$\forall t > 0, \quad F(t) = -\arctan(t) + \frac{\pi}{2} ,$$

ce qui se transforme en :

$$\forall t > 0, \quad F(t) = \arctan\left(\frac{1}{t}\right) .$$

Or la fonction arctangente est développable en série entière sur l'intervalle $]-1\,;1[$ (en intégrant terme à terme le développement en série entière de sa dérivée). Ensuite on écrit ce développement en $\frac{1}{t}$, ce qui est licite si $\frac{1}{t}$ est compris entre -1 et 1, en particulier si t est strictement supérieur à 1.

4. Une intégration par parties dans laquelle on dérive la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ donne :

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \cos(1) - \frac{\cos(b)}{b} - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx .$$

Le terme $\frac{\cos(b)}{b}$ tend vers 0 quand b tend vers ∞. De plus on a :

$$\forall x \in [1\,;b], \quad \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} .$$

Or l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann convergente, ce qui implique que la limite

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx$$

existe et est finie. Par conséquent la limite

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

existe et est finie.

5. On admet que F est continue en 0, donc :

$$\begin{aligned}
F(0) &= \lim_{t\to 0} F(t) \\
&= \lim_{t\to 0} \left(-\arctan(t) + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} .
\end{aligned}$$

6. Soit n un entier strictement positif. On peut écrire, par la relation de Chasles :

$$|I((n+1)\pi) - I(n\pi)| = \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx\right| .$$

Si n est pair, la fonction sinus est positive sur l'intervalle $[n\pi\ ;(n+1)\pi]$, donc :

$$\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,dx\ .$$

Puis :

$$\frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{\sin(x)}{(n+1)\pi}\ .$$

En intégrant, on obtient donc :

$$|I((n+1)\pi) - I(n\pi)| \geq \frac{1}{(n+1)\pi}\underbrace{(\cos(n\pi) - \cos((n+1)\pi))}_{=2}\ .$$

Dans le cas où n est impair, la fonction sinus est négative sur l'intervalle $[n\pi\ ;(n+1)\pi]$, donc :

$$\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| = -\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,dx\ .$$

Puis :

$$\frac{-\sin(x)}{x} \geq \frac{-\sin(x)}{(n+1)\pi}\ .$$

En intégrant, on obtient donc :

$$|I((n+1)\pi) - I(n\pi)| \geq \frac{1}{(n+1)\pi}\underbrace{(\cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi))}_{=2}\ .$$

Soit ensuite N un entier naturel.

$$\begin{aligned}\int_0^{(N+1)\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx &= \sum_{n=0}^{N}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx\\ &\geq \sum_{n=0}^{N}\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,dx\right|\\ &\geq \sum_{n=0}^{N}\frac{2}{(n+1)\pi}\ .\end{aligned}$$

Or cette série numérique est divergente, donc on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx$ diverge.

Exercice 2 Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$, soit P la parabole de représentation paramétrique, pour $u \in \mathbb{R}$,

$$u \mapsto M(u) = (x(u), y(u)) = (u^2, 2u)\ .$$

1. (a) Un vecteur directeur $\vec{t}(u)$ de la tangente au point $M(u)$ à la parabole P :

$$\vec{t}(u) = (x'(u), y'(u)) = (2u, 2)\ .$$

   (b) Un vecteur directeur $\vec{n}(u)$ de la normale au point $M(u)$ à la parabole P doit être non nul et orthogonal à $\vec{t}(u)$. On peut choisir $\vec{n}(u) = (-2, 2u)$.

   (c) La tangente $T(u)$ à la parabole P au point $M(u)$ passe par $M(u)$ et est dirigée par $\vec{t}(u)$. Comme équation cartésienne de $T(u)$, on trouve :

$$x - uy + u^2 = 0\ .$$

2. Soit A le point de coordonnées $(a, 0)$. La droite $T_1(u)$ passant par A et orthogonale à $T(u)$ est dirigée par $\vec{n}(u)$; on en trouve donc une équation cartésienne :

$$ux + y - ua = 0\ .$$

Le point $H(u)$, de coordonnées $(X(u), Y(u))$, est le projeté orthogonal de A sur $T(u)$, c'est donc l'intersection des droites $T_1(u)$ et $T(u)$; la résolution du système

$$\begin{cases} x - uy + u^2 = 0\\ ux + y - ua = 0\end{cases}$$

donne :

$$\left\{\begin{array}{l} X(u) = \dfrac{u^2(a-1)}{1+u^2} \\ Y(u) = \dfrac{u(u^2+a)}{1+u^2} \end{array}\right. .$$

3. Lorsque u tend vers $+\infty$, $X(u)$ tend vers $a-1$ et $Y(u)$ vers $+\infty$.
   Lorsque u tend vers $-\infty$, $X(u)$ tend vers $a-1$ et $Y(u)$ vers $-\infty$. On en déduit que la droite verticale Δ_a d'équation $x = a-1$ est asymptote à la courbe C_a lorsque u tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.
4. Cherchons trois réels λ, μ et γ non tous nuls tels que :

   $$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \lambda X(u) + \mu Y(u) + \gamma = 0 \; .$$

   On obtient : $\gamma = \mu = 0$, et $\lambda(a-1) = 0$. Donc, dans le cas où a vaut 1, la courbe C_1 est la droite verticale d'équation $x = 0$.
5. Ici $a = 0$. La courbe C_0 a pour représentation paramétrique :

   $$\left\{\begin{array}{l} X(u) = \dfrac{-u^2}{1+u^2} \\ Y(u) = \dfrac{u^3}{1+u^2} \end{array}\right. .$$

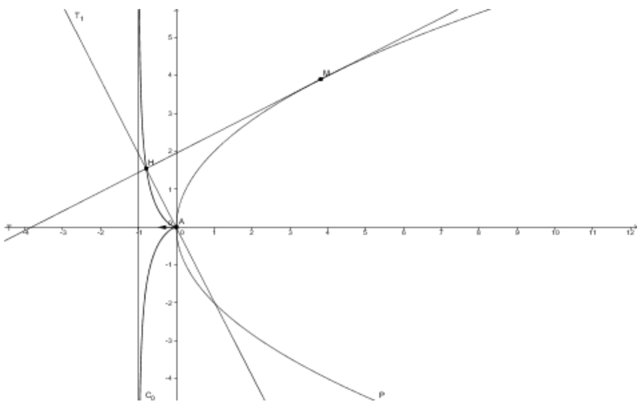
   Comme X est paire et Y impaire, la courbe C_0 présente une symétrie par rapport à l'axe des abscisses et il suffit de faire l'étude pour $u \geq 0$. Les dérivées de X et Y sont :

   $$\left\{\begin{array}{l} X'(u) = \dfrac{-2u}{(1+u^2)^2} \\ Y'(u) = \dfrac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} \end{array}\right. ,$$

   ce qui conduit au tableau de variation suivant :

u	0		$+\infty$
$X'(u)$	0	$-$	
X	0	$\searrow$	-1
Y	0	$\nearrow$	$+\infty$
$Y'(u)$	0	$+$	

   Si u est non nul, le point $H(u)$ est régulier, et la tangente à C_0 en ce point est dirigée par le vecteur non nul $(X'(u), Y'(u))$, qui est colinéaire au vecteur $(-2, u(3+u^2))$.
   Le point $H(0)$ est un point singulier. *(La fin de cette question est hors programme).* Le vecteur $(X''(0), Y''(0))$ est le vecteur $(-2, 0)$; le point $H(0)$ est donc un point de rebroussement. La demi-tangente à la courbe en $H(0)$ est horizontale. Par symétrie de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, le point $H(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.
6. Voici la figure :

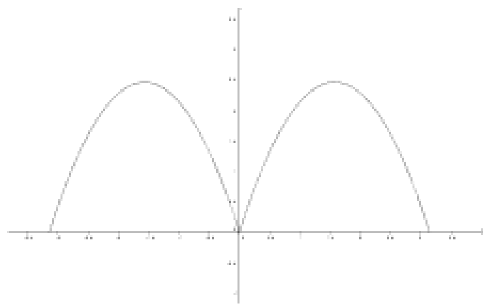


Exercice 3 Pour tout couple d'entiers naturels (n, p), on définit :

$$I_p(n) = \int_0^{\pi} x^p \cos(2nx)\, dx \; .$$

1. Soit p un entier naturel.
$$I_p(0) = \int_0^\pi x^p \, dx = \frac{\pi^{p+1}}{p+1} \, .$$
Soit n un entier strictement positif.
$$I_0(n) = \int_0^\pi \cos(2nx) \, dx = \left[\frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_0^\pi = 0 \, .$$
Une intégration par parties permet de calculer $I_1(n)$:
$$I_1(n) = \int_0^\pi x \, \cos(2nx) \, dx = \underbrace{\left[\frac{x \sin(2nx)}{2n} \right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \frac{\sin(2nx)}{2n} \, dx = \frac{1}{4n^2} \left[\cos(2nx) \right]_0^\pi = 0 \, .$$
Enfin, deux intégrations par parties successives permettent de calculer $I_2(n)$:
$$I_2(n) = \int_0^\pi x^2 \, \cos(2nx) \, dx = -\frac{1}{n} \int_0^\pi x \sin(2nx) \, dx = \frac{1}{2n^2} \left[x \cos(2nx) \right]_0^\pi - \frac{1}{2n^2} \underbrace{\int_0^\pi \cos(2nx) \, dx}_{=0} = \frac{\pi}{2n^2} \, .$$

2. Soit f la fonction π-périodique telle que : $\forall x \in [0\,;\pi[, \quad f(x) = \alpha x^2 + \beta x$.
   (a) Le coefficient de Fourier a_0 de f est défini par : $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi f(x) \, dx$. D'où :
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\alpha x^2 + \beta x \right) \, dx = \frac{\alpha \pi^2}{3} + \frac{\beta \pi}{2} \, .$$
   Soit n un entier strictement positif. Le coefficient de Fourier a_n de f est défini par : $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi f(x) \, \cos(2nx) \, dx$. D'où :
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\alpha x^2 + \beta x \right) \, \cos(2nx) \, dx = \frac{2\alpha}{\pi} \underbrace{I_2(n)}_{=\frac{\pi}{2n^2}} + \frac{2\beta}{\pi} \underbrace{I_1(n)}_{=0} = \frac{\alpha}{n^2} \, .$$
   On veut que $a_0 = \dfrac{\pi^2}{6}$ et que, pour tout entier n strictement positif, $a_n = \dfrac{-1}{n^2}$, donc on obtient le système suivant :
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha \pi^2}{3} + \dfrac{\beta \pi}{2} = \dfrac{\pi^2}{6} \\ \forall n > 0, \quad \dfrac{\alpha}{n^2} = \dfrac{-1}{n^2} \end{array} \right. \, .$$
   (b) La deuxième équation donne $\alpha = -1$, puis la première donne $\beta = \pi$.
   (c) La fonction f est π-périodique et définie sur $[0\,;\pi[$ par : $f(x) = x(\pi - x)$.



   (d) Soit $x \in]-\pi\,;0[$. Alors $-x \in]0\,;\pi[$, et donc : $f(-x) = -x(\pi + x)$. On a aussi : $\pi + x \in]0\,;\pi[$, donc $f(\pi + x) = (\pi + x)\,(\pi - (\pi + x)) = -x(\pi + x)$. On en conclut donc que : $f(-x) = f(\pi + x)$.
   (e) Comme f est π-périodique, continue sur $[0\,;\pi[$, et que $f(0) = 0 = \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x)$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in]-\pi\,;0[$. Par π-périodicité de f, on a : $f(\pi + x) = f(x)$, donc :
$$\forall x \in]-\pi\,;0[, \quad f(-x) = f(x) \, .$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [n\pi\,;(n+1)\pi[$. On a alors : $x-(n+1)\pi \in [-\pi\,;0[$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f(x-(n+1)\pi) \quad \text{par } \pi\text{-périodicité} \\ & = & f(-x+(n+1)\pi) \quad \text{par la propriété ci-dessus} \\ & = & f(-x) \quad \text{par } \pi\text{-périodicité .} \end{array}$$

Ceci montre que f est paire.

3. Comme f est paire, ses coefficients de Fourier b_n sont tous nuls.
4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc le théorème de Dirichlet s'applique et donne :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = S_f(x)\ .$$
5. Le résultat de la question précédente s'écrit :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}\ .$$
En $x=0$, on obtient :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$
6. En prenant $x = \frac{\pi}{2}$, et en remarquant que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$, on obtient :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\ .$$
Enfin,
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}\ .$$
7. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de Parseval s'applique ; il s'écrit :
$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x))^2\, dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\ .$$
Le terme de gauche vaut $\frac{\pi^4}{30}$, ce qui mène à :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\ .$$

Exercice 4 Dans un espace vectoriel E de dimension 3, on considère l'endomorphisme f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Le vecteur $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ appartient au noyau de f si et seulement si :
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}\ .$$
Ceci équivaut au système :
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \right. .$$
Le noyau de f est donc de dimension 1, engendré par le vecteur $\vec{u} = \vec{j} - 2\vec{k}$.
2. Notons P_A le polynôme caractéristique de A : $P_A(X) = \det(A - XI)$. On le calcule en développant par rapport à la première ligne, et on trouve :
$$P_A(X) = -X(X-1)^2\ .$$
Il a donc pour racines : 0 (simple) et 1 (double).

3. Notons E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Le vecteur $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ appartient à E_1 si et seulement si :
$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
Ceci équivaut au système :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y+z = 0 \end{cases}.$$
Le sous-espace propre E_1 est donc de dimension 1, engendré par le vecteur $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$.
4. La valeur propre 1 est double et le sous-espace propre associé est de dimension 1, ce qui montre que la matrice A n'est pas diagonalisable.
5. (a) Montrons que la famille $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{i}\right\}$ est libre. Pour cela supposons qu'il existe trois scalaires α, β et γ tels que :
$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{i} = \vec{0}.$$
On obtient le système :
$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha - \beta = 0 \end{cases},$$
ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{i}\right\}$ est donc libre; comme E est de dimension 3, on en conclut que c'est une base de E.
(b) Comme $\vec{u}$ est un vecteur du noyau de f, on a : $f(\vec{u}) = \vec{0}$. De plus, comme $\vec{v}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, on a : $f(\vec{v}) = \vec{v}$.
Sur la matrice A, on lit : $f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Il reste donc à trouver trois scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $f(\vec{i}) = \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{i}$. Cela revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \end{cases},$$
ce qui donne : $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 1$. La matrice B de f dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{i})$ est donc :
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(c) La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ s'écrit :
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Son inverse, que l'on peut calculer par la méthode du pivot de Gauss, est la matrice :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
(d) La matrice A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, la matrice B est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, et P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$; on a donc :
$$A = PBP^{-1}.$$

Soit M une matrice telle que $M^2 = A$. On note g l'endomorphisme de matrice M dans la base $\mathcal{B}$. On a donc : $g \circ g = f$.

6. (a) $f \circ g = (g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g) = g \circ f$.
(b) On a : $f \circ g(\vec{u}) = g \circ \underbrace{f(\vec{u})}_{=\vec{0}} = g(\vec{0}) = \vec{0}$. Ce qui montre que $g(\vec{u})$ appartient au noyau de f. Donc il existe un scalaire λ tel que : $g(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. Mais $f(\vec{u}) = \vec{0} = g \circ g(\vec{u}) = g(\lambda\vec{u}) = \lambda g(\vec{u})$. Ceci implique que $\lambda = 0$ ou bien $g(\vec{u}) = \vec{0}$. Dans les deux cas on obtient : $g(\vec{u}) = \vec{0}$.

On a : $f \circ g(\vec{v}) = g \circ \underbrace{f(\vec{v})}_{=\vec{v}} = g(\vec{v})$. Ce qui montre que $g(\vec{v})$ appartient au sous-espace propre associé à la valeur propre 1 de f, et donc qu'il existe un scalaire x tel que : $g(\vec{v}) = x\vec{v}$.

(c) Soit N la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$. Comme $\mathcal{B}'$ est une base de E, il existe trois scalaires s, t et y tels que $g(\vec{i}) = s\vec{u} + t\vec{v} + y\vec{i}$. On peut alors écrire la matrice N :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

La matrice M est la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$, la matrice N est la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$, et P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$; on a donc :

$$M = PNP^{-1} \quad \text{ou encore} \quad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

(d) Calculons N^2 de deux façons. On a d'une part : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & sy \\ 0 & x^2 & t(x+y) \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix}$. Par ailleurs : $N^2 = (P^{-1}MP)(P^{-1}MP) = P^{-1}M^2P = P^{-1}AP = B$. En identifiant ces deux formes de la matrice N^2, on est conduit au système :

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ sy = -3 \\ t(x+y) = 4 \end{cases},$$

qui n'admet que deux quadruplets solutions : $x = 1, y = 1, s = -3$ et $t = 2$, ou bien : $x = -1, y = -1, s = 3$ et $t = -2$. On obtient donc :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

puis :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$