Corrigé Epreuve G2E BCPST 2015

Problème 1

Partie A : Une situation faisant intervenir une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. a) L'énoncé n'est pas clair : le système ne peut pas passer de l'état 2 à l'état 1, ni de l'état 3 à l'état 2.
Notons $A_i =$ "le système est dans l'état 1 à l'instant i ",$B_i =$ "le système est dans l'état 2 à l'instant i ",$C_i =$ "le système est dans l'état 3 à l'instant i "
Probabilité qu'il soit encore dans l'état E_1 au bout de 3 heures :
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_2)P(A_3/A_2 \cap A_1) = p^3$
Probabilité qu'il soit dans l'état E$_3$ au bout de 3 heures : On peut avoir E_1, E_2, E_3 ou E_2, E_2, E_3 ou E_2, E_3 soit :
$P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap C_3) + P(B_1 \cap C_2) = 2pq^2 + q^2$
Probabilité qu'il soit dans l'état E_3 en exactement de 3 heures :
$P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap C_3) = 2pq^2$

2. a) $P(A_{k+1}) = P(A_k \cap A_{k+1})$ car si le système est en E_1 à l'instant $k+1$, c'est qu'il l'était à l'instant précédent
$P(A_{k+1}) = P(A_k)P(A_{k+1}/A_k) = pu_k$

$$\boxed{u_{k+1} = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} (p \quad 0 \quad 0)}$$

b) $P(B_{k+1}) = P(B_k \cap B_{k+1}) + P(A_k \cap B_{k+1}) = pv_k + qu_k$

$$\boxed{v_{k+1} = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} (q \quad p \quad 0)}$$

$P(C_{k+1}) = P(B_k \cap C_{k+1}) + P(C_k \cap C_{k+1}) = qv_k + w_k$

$$\boxed{w_{k+1} = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} (0 \quad q \quad 1)}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q & 1 \end{pmatrix}}$$

c) $a_{i,j}(k)$ est la probabilité de passer de l'état E_j à l'état E_i en k heures

Partie B : Puissances successives d'une matrice

1. a) Remarquons que $M \in \mathcal{E}_3$ si et seulement $(1 \quad 1 \quad 1)\, M = (1 \quad 1 \quad 1)$

Posons l'hypothèse de récurrence : H_k:" $\quad M^k \in \mathcal{E}_3$"

<u>Initialisation :</u>

$M^0 = I_3 \in \mathcal{E}_3$

D'où H_0 est vrai

<u>Hérédité :</u>

Soit $k \geq 0$, tel que H_k est vrai

$(1 \quad 1 \quad 1)\, M^{k+1} = (1 \quad 1 \quad 1)\, M^k M = (1 \quad 1 \quad 1)\, M = (1 \quad 1 \quad 1)$

D'où H_{k+1} est vrai

Par principe de récurrence : $\boxed{\forall k \geq 0, \quad M^k \in \mathcal{E}_3}$

b) Si $M \in \mathcal{E}_3$, $\quad (1 \quad 1 \quad 1)\, M = (1 \quad 1 \quad 1)$ d'où ${}^tM \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc 1 est valeur propre de ${}^tM$

Or $rg({}^tM - I) = rg(M - I)$ car une matrice et sa transposée ont même rang

Donc $rg(M - I) < 3$

$$\boxed{\text{1 est donc valeur propre de } M}$$

2. a) La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux

$$\boxed{sp(A) = \{1, p\}}$$

b) Déterminons $E_1(A)$

$(A - I)X = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} qx & = 0 \\ qx + qy & = 0 \\ qy & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \quad \boxed{E_1(A) = vect((0,0,1))}$

Déterminons $E_p(A)$

$(A - pI)X = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 & = 0 \\ qy & = 0 \\ qy + qz & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = -\alpha \end{cases} \quad \boxed{E_1(A) = vect((1,0,-1))}$

3. a) Posons l'hypothèse de récurrence : H_k:" il existe a_k tel que $A^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ kqp^{k-1} & p^k & 0 \\ a_k & 1-p^k & 1 \end{pmatrix}$"

<u>Initialisation :</u>

$\mathrm{A}^0 = I_3$

D'où H_0 est vrai en posant $a_0 = 0$

<u>Hérédité :</u>

Soit $k \geq 0$, tel que H_k est vrai

$A^{k+1} == \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ kqp^{k-1} & p^k & 0 \\ a_k & 1-p^k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & q & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{k+1} & 0 & 0 \\ (k+1)qp^k & p^{k+1} & 0 \\ pa_k + q(1-p^k) & p - p^{k+1} + q & 1 \end{pmatrix}$

D'où H_{k+1} est vrai en posant $\boxed{a_{k+1} = pa_k + q(1-p^k)}$

Par principe de récurrence : $\boxed{\forall k \geq 0, \quad \text{il existe } a_k \text{ tel que } A^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ kqp^{k-1} & p^k & 0 \\ a_k & 1-p^k & 1 \end{pmatrix}}$

b) $p \in]0,1[$ donc $\lim p^k = 0$ et $\lim kp^{k-1} = 0$
D'autre part, on sait que $A^k \in \mathcal{E}_3$ d'où $\forall k, \quad p^k + kqp^{k-1} + a_k = 1$
D'où $a_k = 1 - p^k - kqp^{k-1}$ et $\lim a_k = 1$

$$\boxed{\lim A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Partie C : Diagonalisation de matrices

1. a) $LX = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \perp v$
$rg(u) = 1$ et $\dim \ker u = 2$

b) $u(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ donc 1 est vp de u et (0,0,1) est un vecteur propre associé

2. On sait que 0 est vp de u et $\dim E_0(u) = 2$
On sait que 1 est vp de u , or la domme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas dépasser 3, donc il n'y a pas d'autre vp et $\dim E_1(u) = 1$
D'où $\dim E_0(u) + \dim E_1(u) = 3$ donc $\boxed{u \text{ est diagonalisable}}$
$E_0(u) = vect((1, -1, 0), (1, 0, -1)), \quad E_1(u) = vect((0, 0, 1))$
$\boxed{u \text{ est diagonalisable dans la base } \mathcal{B}=((1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 0, 1))}$

$$\boxed{L = PDP^{-1}, \text{ avec } D = diag(0, 0, 1) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y & = a \\ -x & = b \\ -y + z & = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = a + b \\ x & = -b \\ z & = c + a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -b \\ y & = a + b \\ z & = a + b + c \end{cases} \qquad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. a) $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}$ (1,-1,0) est vecteur propre de B associé à la vp p
$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}$ (1,0,-1) est vecteur propre de B associé à la vp p
$B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (0,0,1) est vecteur propre de B associé à la vp 1
Donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable dans la base } \mathcal{B}}$

b) $B = P\Delta P^{-1}$ et par récurrence immédiate :
$$B^k = P\Delta^k P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -p^k & 0 \\ p^k & p^k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ -p^k + 1 & -p^k + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ -p^k + 1 & -p^k + 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) $C^2 = 0$
$A = B + C$ comme B et C commutent, on peut appliquer la formule du binôme
$A^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} C^i B^{k-i}$
$\forall i \geq 2, \quad C^i = 0$
D'où $A^k = \binom{k}{k} C^0 A^k + \binom{k}{1} C A^{k-1}$

$$\boxed{A^k = B^k + kCB^{k-1}}$$

d) $A^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ -p^k+1 & -p^k+1 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \\ -q & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & p^{k-1} & 0 \\ -p^{k-1}+1 & -p^{k-1}+1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^k = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ 0 & p^k & 0 \\ -p^k+1 & -p^k+1 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ qp^{k-1} & 0 & 0 \\ -qp^{k-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^k & 0 & 0 \\ kqp^{k-1} & p^k & 0 \\ 1-p^k-kqp^{k-1} & -p^k+1 & 1 \end{pmatrix}$

On retrouve bien le B.3(a)

Partie D : Calcul d'une espérance

1. $\sum k(k-1)p^{k-2}$ converge car c'est une série géométrique dérivée de raison $p \in]-1, 1[$

$\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p^{k-2} = \dfrac{2}{q^3}}$

2. a) $P(X = 0) = 0$
$P(X = 1) = P(C_1) = 0$
$P(X = 2) = P(B_1 \cap C_2) = P(B_1)P(C_2/B_1) = q^2$

b) $P(X \leq k) = P$('le système est dans l'état E3 au bout de k heures')$=w_k$
$\forall k \geq 1, \quad P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = w_k - w_{k-1}$
Or $\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$ et par récurrence immédiate , $\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^k \\ kqp^{k-1} \\ a_k \end{pmatrix}$

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad P(X = k) = a_k - a_{k-1}}$$

c) $a_k - a_{k-1} = 1 - p^k - kqp^{k-1} - 1 + p^{k+1} + (k-1)qp^{k-2} = p^{k-1}(1-p) + (k-1)qp^{k-2}(1-p) - qp^{k-1}$
$a_k - a_{k-1} = (k-1)q^2p^{k-2}$,d'où $\sum kP(X = k)$ converge
$E(X) = q^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p^{k-2} = \dfrac{2q^2}{q^3} = \dfrac{2}{q}$

$$\boxed{E(X) = \frac{2}{q}}$$

Problème 2

Partie A : Des lois exponentielles

1. a) Posons l'hypothèse de récurrence : H_n:" X_k admet un moment d'ordre n égal à $m_n(X_k) = \dfrac{n!}{\lambda^n}$"

   Initialisation :

   H_1 est vrai d'aprés le cours pour une loi géométrique $E(X_k) = \dfrac{1}{\lambda}$

   Hérédité :

   Soit $n \geq 1$, tel que H_n est vrai

   $\int_0^A t^{n+1}\lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-t^{n+1}e^{-\lambda t}\right]_0^A + \dfrac{(n+1)}{\lambda}\int_0^A t^n \lambda e^{-\lambda t}dt$ par intégration par parties

   Par croissances comparées : $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{n+1}e^{-\lambda A} = 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A t^n\lambda e^{-\lambda t}dt = m_n(X_k)$

   D'où X_k admet un moment d'ordre $n+1$ égal à $m_{n+1}(X_k) = \dfrac{(n+1)}{\lambda} m_n(X_k) = \dfrac{(n+1)!}{\lambda^{n+1}}$

   D'où H_{n+1} est vrai

   Par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \geq 1, \quad X_k \text{ admet un moment d'ordre } n \text{ égal à } m_n(X_k) = \dfrac{n!}{\lambda^n}}$

   b) $m_0(X_k) = E(1) = 1 = \dfrac{0!}{\lambda^0}$

   $\dfrac{1}{m_n(X_k)} = \dfrac{\lambda^n}{n!}$

   $\boxed{\sum \dfrac{1}{m_n(X_k)} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{m_n(X_k)} = e^{\lambda}}$

2. $Y_p = \min(X_1, .., X_p)$

   a) $\forall t < 0, \quad \overline{F_{X_1}}(t) = 1 - F_{X_1}(t) = 1$
   $\forall t \geq 0, \quad \overline{F_{X_1}}(t) = 1 - F_{X_1}(t) = e^{-\lambda t}$

   b) $\overline{F_{Y_p}}(t) = P\left(Y_p > t\right) = P\left(X_1 > t, .., X_p > t\right) = P\left(X_1 > t\right)..P(X_p > t)$ par indépendance
   $\forall t < 0, \quad F_{Y_p}(t) = 1 - \overline{F_{Y_p}}(t) = 1 - 1 = 0$
   $\forall t \geq 0, \quad F_{Y_p}(t) = 1 - \overline{F_{Y_p}}(t) = 1 - \left(e^{-\lambda t}\right)^p = 1 - e^{-\lambda pt}$

   $$\boxed{Y_p \text{ suit } \mathcal{E}(\lambda p)}$$

   c) D'aprés le cours : $\boxed{E(Y_p) = \dfrac{1}{p\lambda}, \quad V(Y_p) = \dfrac{1}{(p\lambda)^2}}$

3. $p = 2$ et la durée moyenne de l'intervention d'un technicien est de 2 heures , c'est-à-dire $E(X_1) = 2 = \dfrac{1}{\lambda}$

   a) $P(X_2 \leq 2) = 1 - e^{-2\lambda} = 1 - \dfrac{1}{e} = 0.632\,12$

   b) $P\left(Y_2 \leq 1/X_2 \geq 2\right) = \dfrac{P\left(\min(X_1, X_2) \leq 1, X_2 \geq 2\right)}{P(X_2 \geq 2)} = \dfrac{P\left(X_1 \leq 1, X_2 \geq 2\right)}{P(X_2 \geq 2)} = \dfrac{P\left(X_1 \leq 1\right)(P(X_2 \geq 2)}{P(X_2 \geq 2)}$

   $P\left(Y_2 \leq 1/X_2 \geq 2\right) = P(X_1 \leq 1) = 1 - e^{-1/2} = 0.393\,47$

   c) $P\left(Y_2 \leq 1/X_2 \leq 2\right) = 1 - P\left(Y_2 > 1/X_2 \leq 2\right)$

   $P\left(Y_2 > 1/X_2 \leq 2\right) = \dfrac{P\left(\min(X_1, X_2) > 1, X_2 \leq 2\right)}{P(X_2 \geq 2)} = \dfrac{P\left(X_1 > 1, X_2 > 1, X_2 \leq 2\right)}{P(X_2 \geq 2)} = \dfrac{P\left(X_1 > 1\right)(P(1 < X_2 \leq 2}{P(X_2 \geq 2)}$

   $P\left(Y_2 \leq 1/X_2 \leq 2\right) = 1 - \dfrac{\left(1 - e^{-1/2}\right)\left(e^{-1/2} - e^{-1}\right)}{e^{-1}} = 1 - \left(1 - e^{-1/2}\right)\left(e^{1/2} - 1\right) = 3 - e^{-1/2} - e^{1/2} =$
   $0.744\,75$

Partie B : Calcul d'une limite d'une probabilité

1. $Z_2 = \max(X_1, X_2)$

   a) $P(Z_2 \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x) = (F_{X_1}(x))(F_{X_2}(x))$ par indépendance
   F_{Z_2} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, donc Z_2 admet une densité f_{Z_2} :
   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{Z_2}(x) = 2f_{X_1}(x)F_{X_1}(x)$

$$\boxed{f_{Z_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

   b) Sous réserve de convergence : $E(Z_2) = \int_0^{+\infty} 2\lambda x e^{-\lambda x} - 2\lambda x e^{-2\lambda x} dx$
   Or $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ converge car on reconnaît l'espérance de $\mathcal{E}(\lambda)$
   $\int_0^{+\infty} 2\lambda x e^{-2\lambda x} dx$ converge car on reconanît l'espérance de $\mathcal{E}(\lambda)$
   D'où Z_2 admet une espérance et $E(Z_2) = 2\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx - \int_0^{+\infty} 2\lambda x e^{-2\lambda x} dx = \dfrac{2}{\lambda} - \dfrac{1}{2\lambda} = \dfrac{3}{2\lambda}$

$$\boxed{E(Z_2) = \frac{3}{2\lambda}}$$

   $E(Y_2) + E(Z_2) = \dfrac{1}{2\lambda} + \dfrac{3}{2\lambda} = \dfrac{2}{\lambda}$
   $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \dfrac{2}{\lambda}$
   On a l'égalité $E(Y_2) + E(Z_2) = E(X_1 + X_2)$
   Ce qui est logique car $\boxed{Y_2 + Z_2 = X_1 + X_2}$

   c) Pour les mêmes raisons, Z_2 admet un moment d'ordre 2, car on reconnaît des moments d'ordre 2 de lois exponentielles
   On utilise ensuite que $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$
   $E(Z_2^2) = 2\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx - \int_0^{+\infty} 2\lambda x^2 e^{-2\lambda x} dx = 2\left[\dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2}\right] - \left[\dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2}\right] = \dfrac{7}{2\lambda^2}$

$$\boxed{V(Z_2) = E(Z_2^2) - E(Z_2)^2 = \frac{7}{2\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{5}{4\lambda^2}}$$

2. a) $P(Z_2 \geq n + x) = 1 - F_{Z_2}(n + x) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda(n+x)}\right)^2$
   $P(Z_2 \geq n + x) = 2e^{-\lambda(n+x)} - e^{-2\lambda(n+x)} \underset{n\to\infty}{\sim} 2e^{-\lambda(n+x)}$
   $2e^{-\lambda(n+x)} = 2e^{-\lambda x}(e^{-\lambda})^n$: suite géométrique de premier terme $2e^{-\lambda x}$ et de raison $e^{-\lambda}$

   b) $P(Z_2 \geq n + x / Z_2 \geq n) = \dfrac{P(Z_2 \geq n + x, Z_2 \geq n)}{P(Z_2 \geq n)} = \dfrac{P(Z_2 \geq n + x)}{P(Z_2 \geq n)} \sim \dfrac{2e^{-\lambda(n+x)}}{2e^{-\lambda n}} = e^{-\lambda x}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(Z_2 \geq n + x / Z_2 \geq n) = P(X_1 \geq x)}$$

   c) C'est encore vraie pour X_1 car une variable géométrique est sans mémoire :
   $P(X_1 \geq x + y / X_1 \geq y) = P(X_1 \geq x)$

Partie C : Sommes de variables continues

1. $a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R}$

   a) $U = aX_2 + b$
   $U(\Omega) = [b, +\infty[$
   $\forall t < b, \quad F_U(t) = 0$
   $\forall t \geq b, \quad F_U(t) = P(aX_2 + b \leq t) = P\left(X_2 \leq \dfrac{t-b}{a}\right) = F_{X_2}\left(\dfrac{t-b}{a}\right)$
   F_U est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en b, donc U admet une densité f_U :
   $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_U(t) = \dfrac{1}{a} f_{X_2}\left(\dfrac{t-b}{a}\right)$

   $$\boxed{f_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b \\ \dfrac{\lambda}{a} e^{-\lambda(t-b)/a} & \text{si } t \geq b \end{cases}}$$

   b) X_1 et X_2 étant indépendantes alors une fonction de X_1 et une fonction de X_2 sont indépendantes et donc X_1 et $aX_2 + b$ sont indépendantes

2. a) T étant la somme de 2 variables aléatoires indépendantes admettant une densité, alors T admet une densité obtenue par le produit de convolutions
   $T(\Omega) = [b, +\infty[$
   $\underline{\forall t < b, \quad f_T(t) = 0}$
   $\underline{\forall t \geq b,} \quad f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x) f_{X_1}(t-x)dx$
   $f_U(x) > 0 \iff x \geq b, \qquad f_{X_1}(t-x) > 0 \iff x \leq t$
   $f_U(x) f_{X_1}(t-x) \iff b \leq x \leq t$

   $$f_T(t) = \int_b^t \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)} \lambda e^{-\lambda(t-x)} dx = \frac{\lambda^2}{a} e^{\lambda\left(\frac{b}{a} - t\right)} \int_b^t e^{\lambda\left(1 - \frac{1}{a}\right)x} dx = \frac{\frac{\lambda^2}{a} e^{\lambda\left(\frac{b}{a} - t\right)}}{\lambda\left(1 - \frac{1}{a}\right)} \left[e^{\lambda\left(1 - \frac{1}{a}\right)t} - e^{\lambda\left(1 - \frac{1}{a}\right)b} \right]$$

   $$\boxed{f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b \\ \dfrac{\lambda}{1-a} \left[e^{-\lambda(t-b)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} \right] & \text{si } t \geq b \end{cases}}$$

   b) Recherchons des conditions nécessaires
   Les variables sont de même loi si et seulement si elles ont même densité sauf peut-être en un nombre fini de points.
   Il faut $\boxed{b = 0}$
   $$\frac{\lambda}{1-a} \left[e^{-\lambda t} - e^{-\frac{\lambda}{a} t} \right] = 2\lambda e^{-\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{\lambda}{a} t + \lambda t} = 2(1-a)\left[1 - e^{-\lambda t}\right]$$
   La relation ci-dessus doit être vérifiée sur $\mathbb{R}^+$ sauf peut-être en un nombre fini de points.
   En faisant tendre t vers $+\infty$, on en déduit : $\dfrac{\lambda}{a} - \lambda > 0$ et $1 = 2(1-a)$. Il faut donc $\boxed{a = \dfrac{1}{2}}$
   Remarque : on aurait aussi pu trouver des conditions nécessaires par l'espérance et la variance
   $E(Z_2) = E(T) \iff \dfrac{3}{2\lambda} = E(X_1) + aE(X_2) + b \iff \dfrac{3}{2\lambda} = \dfrac{1+a}{\lambda} + b \quad (1)$

$V(Z_2) = V(T) \iff \dfrac{5}{4\lambda^2} = V(X_1) + a^2 V(X_2) \iff \dfrac{5}{4\lambda^2} = \dfrac{1+a^2}{\lambda^2} \quad (2)$

(2)$\iff a^2 = \dfrac{1}{4} \iff a = \dfrac{1}{2}$ puisque $a > 0$

(1) $\Leftrightarrow b = \dfrac{3}{2\lambda} - \dfrac{3}{2\lambda} = 0$

Conditions suffisantes :

$f_{Z_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b \\ 2\lambda\left[e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\right] & \text{si } t \geq b \end{cases}$ on a bien les mêmes lois

$$\boxed{Z_2 \text{ et } T \text{ ont même loi si et seulement si } b = 0 \text{ et } a = 1/2}$$

3. $T_p = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k} X_k$

a) $E(T_p) = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k} E(X_k) = \dfrac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k}$

La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge, donc la suite $(E(T_p))$ diverge (et tend vers $+\infty$)

Par indépendance, $V(T_p) = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k^2} V(X_k) = \dfrac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k^2}$

La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge, donc la suite $(V(T_p))$ converge

b) Déterminons d'abord une densité f_k de $\dfrac{1}{k} X_k$

D'aprés le 1.a.de la partie C, avec $a = \dfrac{1}{k}$ et

c) , on peut choisir : $f_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ k\lambda e^{-k\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Posons l'hypothèse de récurrence : H_p:" T_p admet une densité :$f_{T_p}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda p e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{p-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ "

Initialisation :

H_1 est vrai : c'est la loi géométrique de paramètre λ

Hérédité :

Soit $p \geq 1$, tel que H_p est vrai

$T_{p+1} = T_p + \dfrac{1}{p+1} X_{p+1}$, somme de deux variables indépendantes admettant une densité, admet elle aussi une densité obtenue par le produit de convolution.

$T_{p+1}(\Omega) = [0, +\infty[$

$\forall x < 0, \quad f_{T_{p+1}}(x) = 0$

$\forall x \geq 0, \quad f_{Tp+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_p}(t) f_{p+1}(x-t)dx$

$f_{T_p}(x) f_{p+1}(t-x) > 0 \iff 0 \leq x \leq t$

$f_{Tp+1}(x) = \int_0^x \lambda p e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{p-1}(p+1)\lambda e^{-(p+1)\lambda(x-t)}dt = p(p+1)\lambda^2 e^{-\lambda(p+1)x} \int_0^x e^{\lambda p t}(1-e^{-\lambda t})^{p-1}dt$

$f_{Tp+1}(x) = p(p+1)\lambda^2 e^{-\lambda(p+1)x} \int_0^x e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)^{p-1}dt$

$\int_0^x e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)^{p-1}dt = \left[\dfrac{(e^{\lambda t} - 1)^p}{\lambda p}\right]_0^x = \dfrac{(e^{\lambda x} - 1)^p}{\lambda p}$

$f_{Tp+1}(x) = (p+1)\lambda e^{-\lambda(p+1)x}(e^{\lambda x} - 1)^p = (p+1)\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^p$

D'où H_{p+1} est vrai

Par principe de récurrence : $\boxed{\forall p \geq 1, \quad T_p \text{ admet une densité } :f_{T_p}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda p e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{p-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$

Remarque :

On peut montrer que T_p a même loi que $\max(X_1, , X_p)$