G2E 2013

PROBLÈME 1

Partie A : Une densité de probabilité

1. La fonction Arctan est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$, impaire, et : $\boxed{\lim_{-\infty} \text{Arctan} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{+\infty} \text{Arctan} = \frac{\pi}{2}}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}.$$

$$\boxed{\text{Arctan est strictement croissante sur } \mathbb{R}}.$$

2. Notons φ la fonction : $x \mapsto \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x}$. $\mathscr{D}_\varphi = \mathbb{R}^*$, φ est impaire, φ est dérivable en tout réel x non nul et :

$$\varphi'(x) = \text{Arctan}'(x) + \frac{-1}{x^2}\,\text{Arctan}'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0,$$

donc φ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$, donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x} = \text{Arctan}\,(1) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{1}\right) = 2\,\text{Arctan}\,(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}}$$

et par imparité de φ : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}}$.

3. Soient $m \in \mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

a.

- La fonction mf est continue sur $\mathbb{R}$. Si mf est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} m\, f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. Or, pour tout $A \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^A m\, f(x)\,\mathrm{d}x = m\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = m\int_0^A \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = m\big[\text{Arctan}\,(x)\big]_0^A = m\,\text{Arctan}\,(A),$$

donc : $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A m\, f(x)\,\mathrm{d}x = m\dfrac{\pi}{2}$, ce qui prouve que $\int_0^{+\infty} m\, f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $m\dfrac{\pi}{2}$.

De plus, f est paire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} m\, f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} m\, f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \times m\dfrac{\pi}{2} = m\pi$.

On en déduit que, si mf est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, alors $m = \dfrac{1}{\pi}$.

- Réciproquement, si $m = \dfrac{1}{\pi}$, alors mf est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} m\, f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, donc mf est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

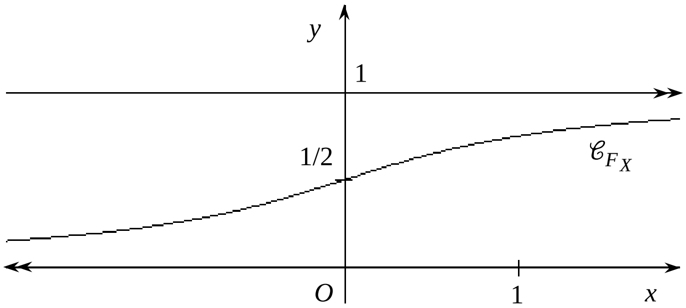
En conclusion : $\boxed{mf \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R} \text{ si, et seulement si, } m = \frac{1}{\pi}}$.

b. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité $\dfrac{1}{\pi} f$.

En notant F_X la fonction de répartition de X, on a, pour tout réel x :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}\,(x) - \lim_{t\to-\infty} \text{Arctan}\,(t)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}\,(x) + \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{Arctan}\,(x)}$.



c. Pour tout réel A :

$$\int_0^A x\times\frac{1}{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^A\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^A=\frac{1}{2\pi}\ln(1+A^2),$$

donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A x\times\frac{1}{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty}x\times\frac{1}{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Il s'ensuit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}x\times\frac{1}{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$ est également divergente, ce qui prouve que X n'admet pas d'espérance, et donc pas davantage de variance (si une variable aléatoire admet une variance, alors elle admet une espérance).

$\boxed{X \text{ n'admet ni espérance, ni variance.}}$

d. • Médiane m_e de X

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P(X\le x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow F_X(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\operatorname{Arctan}(x)=0\Leftrightarrow x=0,$$

donc : $\boxed{m_e=0}$.

• Premier quartile Q_1 et troisième quartile Q_3 de X

De même, pour tout réel x :

$$P(X\le x)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\operatorname{Arctan}(x)=-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=-1,\quad P(X\le x)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\operatorname{Arctan}(x)=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=1,$$

donc : $\boxed{Q_1=-1,\quad Q_3=1}$.

Partie B : Des matrices à coefficients complexes

$$\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\ (a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4\ \text{ et }\ c\neq0\right\}.\ \forall A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M},\quad \varphi_A:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}.$$

1. Soient $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ et $\varphi_A:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$.

a. Immédiatement : $\boxed{\mathcal{D}_{\varphi_A}=\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{-d}{c}\right\}}$.

b. Supposons $bc=ad$. Alors, c étant non nul, on peut écrire que $b=\dfrac{ad}{c}$ et :

$$\forall z\in\mathcal{D}_{\varphi_A},\quad \varphi_A(z)=\frac{az+\frac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{a}{c}\times\frac{z+\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}.$$

On en déduit que, $\boxed{\text{si } bc=ad\text{, alors } \varphi_A \text{ est une fonction constante}}$.

c. Supposons $bc \neq ad$. Alors, pour tout $z \in \mathcal{D}_{\varphi_A}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$:

$$\varphi_A(z) = z' \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z' \Leftrightarrow az+b = z'(cz+d) \Leftrightarrow (cz'-a)z = -dz'+b,$$

donc, si $z' = \frac{a}{c}$, alors : $\varphi_A(z) = z' \Leftrightarrow 0 = -d\frac{a}{c}+b \Leftrightarrow \frac{bc-ad}{c} = 0 \Leftrightarrow bc = ad$, ce qui implique que $\frac{a}{c}$ n'admet pas d'antécédent par φ_A, et si $z' \neq \frac{a}{c}$, alors : $\varphi_A(z) = z' \Leftrightarrow z = \dfrac{-dz'+b}{cz'-a}$.

On a ainsi prouvé que, $\boxed{\text{si } bc \neq ad \text{ alors } \varphi_A \text{ réalise une bijection de } \mathcal{D}_{\varphi_A} \text{ sur } \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}}$, dont la bijection réciproque notée φ_A^{-1} est la fonction :

$$\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\}, \quad z \mapsto \frac{-dz+b}{cz-a}.$$

De plus, en posant : $\boxed{A' = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}}$, on a : $\boxed{A' \in \mathcal{M}}$ et on peut considérer que $\boxed{\varphi_A^{-1} = \varphi_{A'}}$.

A' n'est bien sûr pas unique : $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \ \varphi_{\lambda A'} = \varphi_{A'} = \varphi_A^{-1}$.

d. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc, $\boxed{\text{si } bc \neq ad \text{, alors}}$:

$$A \times \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2,$$

ce qui prouve que $\boxed{A \text{ est inversible et}}$ $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, ou encore, avec la définition de A' précédente :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{bc-ad}A'}.$$

2. Soient A_1 et A_2 deux éléments de $\mathcal{M}$ tels que $A_1A_2 \in \mathcal{M}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}, \ A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}, \ A_1A_2 \in \mathcal{M} \quad \text{avec } c_1 \neq 0 \text{ et } c_2 \neq 0.$$

a. Immédiatement : $\boxed{A_1A_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}}$, et donc $c_1a_2+d_1c_2 \neq 0$ puisque $A_1A_2 \in \mathcal{M}$.

b. Formellement :

$$\varphi_{A_1} \circ \varphi_{A_2}(z) = \varphi_{A_1}\left(\varphi_{A_2}(z)\right) = \frac{a_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+b_1}{c_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+d_1} = \frac{a_1(a_2z+b_2)+b_1(c_2z+d_2)}{c_1(a_2z+b_2)+d_1(c_2z+d_2)},$$

$$\varphi_{A_1} \circ \varphi_{A_2}(z) = \frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+a_1b_2+b_1d_2}{(c_1a_2+d_1c_2)z+c_1b_2+d_1d_2},$$

c'est-à-dire d'après la question précédente :

$$\varphi_{A_1} \circ \varphi_{A_2}(z) = \varphi_{A_1A_2}(z),$$

et l'énoncé nous invite à conclure : $\varphi_{A_1} \circ \varphi_{A_2} = \varphi_{A_1A_2}$, autrement dit que $\boxed{A_1A_2 \text{ est associée à } \varphi_{A_1} \circ \varphi_{A_2}}$.

3. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$, $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ et $bc \neq ad$.

a. Démontrer : « si $(x,y)\in\mathbb{C}^2$ est un vecteur propre de A alors $y\neq 0$ » revient à prouver que $(1,0)$ n'est pas vecteur propre de A. Or : $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ et $c\neq 0$ (car $A\in\mathcal{M}$), donc $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc $(1,0)$ n'est pas vecteur propre de A, ce qui achève la démonstration.

$$\boxed{\text{Si } (x,y)\in\mathbb{C}^2 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ alors } y\neq 0}.$$

b. Soit $(x,y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

- $y\neq 0$, donc $(x,y)\neq(0,0)$.
- $bc\neq ad$, donc A est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre de A.

On en déduit que (x,y) est un vecteur propre de A si, et seulement si, il existe $\lambda\in\mathbb{C}^*$ tel que $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

De plus, sous la condition $\lambda\in\mathbb{C}^*$:

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=\lambda x \\ cx+dy=\lambda y\end{cases} \underset{\substack{\lambda\neq 0\\ y\neq 0}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} ax+by=\lambda x \\ cx+dy=\lambda y \\ cx+dy\neq 0\end{cases} \underset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a\frac{x}{y}+b=\lambda\frac{x}{y} \\ c\frac{x}{y}+d=\lambda \\ c\frac{x}{y}+d\neq 0\end{cases}$$

donc :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow c\frac{x}{y}+d\neq 0 \text{ et } \frac{a\frac{x}{y}+b}{c\frac{x}{y}+d}=\frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{x}{y}\in\mathcal{D}_{\varphi_A} \text{ et } \varphi_A\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}.$$

Finalement :

$$\boxed{(x,y) \text{ est un vecteur propre de } A \text{ si et seulement si } \varphi_A\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}}.$$

c. Soit $z\in\mathbb{C}$.

D'après la question précédente, $(z,1)$ est un vecteur propre de A si, et seulement si, $z\in\mathcal{D}_{\varphi_A}$ et $\varphi_A(z)=z$.

Pour tout $z\in\mathcal{D}_{\varphi_A}$, c'est-à-dire pour tout nombre complexe z distinct de $-\frac{d}{c}$:

$$\varphi_A(z)=z \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d}=z \Leftrightarrow az+b=(cz+d)z \Leftrightarrow cz^2-(a-d)z-b=0,$$

de plus $c\left(-\frac{d}{c}\right)^2-(a-d)\times\left(-\frac{d}{c}\right)-b=\frac{ad-bc}{c}$ et par hypothèse $ad-bc\neq 0$, donc $\left(-\frac{d}{c},1\right)$ n'est pas vecteur propre de A.

Donc, pour tout $z\in\mathbb{C}$: $(z,1)$ est un vecteur propre de A si, et seulement si, $cz^2+(d-a)z-b=0$.

Considérons l'équation (E) du second degré, à coefficients réels, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: $cz^2-(a-d)z-b=0$.

(E) admet pour discriminant le réel Δ défini par : $\Delta=(a-d)^2+4bc$.

Supposons $\Delta\neq 0$.

Alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes z_1 et z_2. En posant $u_1=(z_1,1)$ et $u_2=(z_2,1)$, il s'ensuit que u_1 et u_2 sont des vecteurs propres de A. De plus, u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc la famille (u_1,u_2)

est libre, donc, comme famille libre de deux vecteurs du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ de dimension 2, (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{C}^2$.

Ainsi, la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de A, où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donc A est diagonalisable. On a ainsi démontré :

$$\boxed{(a-d)^2 + 4bc \neq 0 \;\Rightarrow\; A \text{ diagonalisable}}.$$

d. Si A est diagonalisable, alors il existe une base de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de A. Or d'après **3. a.**, tout vecteur propre de A est colinéaire à un vecteur de deuxième composante égale à 1, donc il existe des nombres complexes z_1 et z_2 distincts tels que $(z_1, 1)$ et $(z_2, 1)$ soient des vecteurs propres de A. D'après le début de la question **3. c.**, il s'ensuit que l'équation (E) : $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$, et donc que son discriminant $(a-d)^2 + 4bc$ est non nul. On a ainsi prouvé la réciproque de l'implication démontrée à la question **3. c.** :

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \;\Rightarrow\; (a-d)^2 + 4bc \neq 0}.$$

4. $B = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Les matrices B, C et D sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont le coefficient de position $(2,1)$ est non nul : ce sont bien des éléments de $\mathcal{M}$.

a. D'après la question **1.** : $\boxed{B \text{ est inversible et } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}}$.

b. On obtient immédiatement : $\boxed{C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$, autrement dit $C \times C = I_2$, ce qui prouve que C est inversible et :

$$C^{-1} = C.$$

C est une matrice carrée d'ordre 2 inversible, donc $\boxed{\text{le rang de } C \text{ est égal à } 2}$.

c. On sait déjà : $\boxed{C^{-1} = C}$.

Une récurrence immédiate permet d'écrire :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\; C^n = \begin{cases} I_2 & \text{si } n \text{ est pair}, \\ C & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases}}$$

d. φ_D est la fonction : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{z+1}{-z+1}$. On vérifie immédiatement que D est bien diagonalisable en exploitant le résultat de la question **3. c)**. On obtient ensuite facilement :

$$\forall z \in \mathcal{D}_{\varphi_D}, \quad \varphi_D(z) = z \iff z^2 + 1 = 0 \iff (z = -\mathrm{i} \text{ ou } z = \mathrm{i}),$$

donc $(-\mathrm{i}, 1)$ et $(\mathrm{i}, 1)$ sont des vecteurs propres de D.

De plus :

$$D\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}+1 \\ \mathrm{i}+1 \end{pmatrix} = (1+\mathrm{i})\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}+1 \\ -\mathrm{i}+1 \end{pmatrix} = (1-\mathrm{i})\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les valeurs propres de D sont $1+\mathrm{i}$ et son conjugué $1-\mathrm{i}$.

On sait alors qu'en posant :

$$\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}},$$

P est inversible et $D = P\,\Delta\,P^{-1}$.

Toujours grâce au résultat de la question **1. d.** : $\quad P^{-1} = \dfrac{1}{-2\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$.

e. On démontre facilement par récurrence : $\forall\, p \in \mathbb{N},\ D^p = P\,\Delta^p\,P^{-1}$.

On en déduit, d'après les règles opératoires sur les matrices diagonales :

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ D^p = P\begin{pmatrix} (1+\mathrm{i})^p & 0 \\ 0 & (1-\mathrm{i})^p \end{pmatrix}P^{-1},$$

puis, en injectant l'expression de P et celle de P^{-1} et en utilisant les formules d'Euler :

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N},\quad D^p = \left(\sqrt{2}\right)^p \begin{pmatrix} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}}.$$

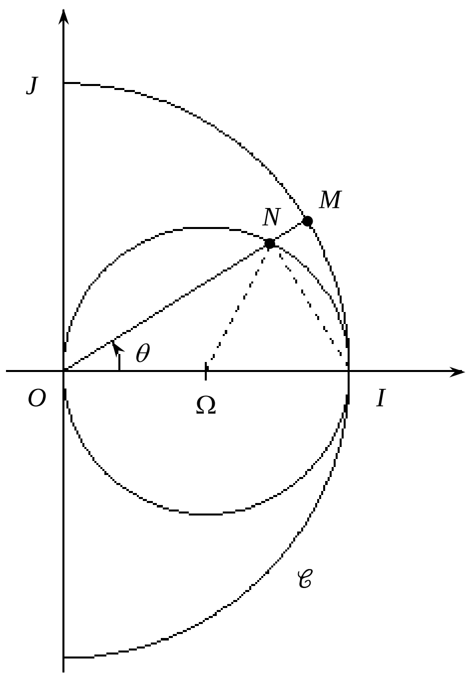
Ce dernier résultat s'obtient facilement par récurrence en utilisant les formules d'addition une fois que l'on a écrit :

$$D = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

En effet, en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad R(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$, on a : $D = R\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, et un exercice classique donne :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ \left(R(x)\right)^p = R(px).$$

Partie C : Des variables aléatoires



Les points d'affixes 1 et i sont respectivement notés I et J.

$\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ z_M = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$/

G2E 2013

1. **a.** • N est un point du cercle de diamètre $[OI]$, distinct de O (car $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$).

Si de plus $\theta \neq 0$, alors $N \neq I$ et le triangle ONI est rectangle en N ; il s'ensuit : $ON = OI\cos(\theta) = \cos(\theta)$.

Cette relation restant vérifiée lorsque $\theta = 0$, on peut conclure : $\boxed{ON = \cos(\theta)}$.

• Par définition de M et N : $z_N = ON\, z_M$, donc : $\boxed{z_N = \cos(\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

b. • $z_N \in \mathcal{D}_{\varphi_B}$ et :

$$\varphi_B(z_N) = \frac{-\mathrm{i}z_N + \mathrm{i}}{z_N} = \mathrm{i}\left(-1 + \frac{1}{z_N}\right) = \mathrm{i}\left(-1 + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{\cos(\theta)}\right) = \mathrm{i}\left(-1 + \frac{\cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = \mathrm{i}\,\frac{-\mathrm{i}\sin(\theta)}{\cos(\theta)},$$

d'où : $\boxed{\varphi_B(z_N) = \tan(\theta)}$.

• Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, $\tan(\theta) \neq 0$, donc $\varphi_B(z_N) \in \mathcal{D}_{\varphi_C}$ et :

$$\varphi_C \circ (\varphi_B(z_N)) = \varphi_C(\tan(\theta)) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

$$\boxed{\forall\, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\},\ (\varphi_C \circ \varphi_B)(z_N) = \frac{1}{\tan(\theta)}}.$$

• Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$, $\tan(\theta) \neq 1$, donc $\varphi_B(z_N) \in \mathcal{D}_{\varphi_D}$ et :

$$\varphi_D \circ (\varphi_B(z_N)) = \varphi_D(\tan(\theta)) = \frac{\tan(\theta) + 1}{-\tan(\theta) + 1} = \frac{\tan(\theta) + \tan(\frac{\pi}{4})}{1 - \tan(\theta)\tan(\frac{\pi}{4})} = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\boxed{\forall\, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\},\ (\varphi_D \circ \varphi_B)(z_N) = \frac{1 + \tan(\theta)}{1 - \tan(\theta)}}.$$

2. On notera F_U la fonction de répartition d'une variable aléatoire U.

$\theta \hookrightarrow \mathcal{U}_{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$, $T = \tan\theta$.

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi}(x + \frac{\pi}{2}) & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a. Pour tout réel x :

$$F_T(x) = P(T \leq x) = P(\tan\theta \leq x),$$

or θ prend ses valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et Arctan est croissante, donc :

$$F_T(x) = P(\theta \leq \operatorname{Arctan}(x)),$$

de plus θ suit la loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2}$, donc :

$$F_T(x) = \frac{1}{\pi}(\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x).$$

Finalement : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = F_X(x)$, ce qui prouve que $\boxed{T \text{ suit la même loi que } X}$.

b. Notons Y la variable aléatoire représentant $(\varphi_C \circ \varphi_B)(z_N)$: $Y = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$.

Y est définie partout sauf sur l'événement $\{\theta = 0\}$ de probabilité nulle.

Pour tout réel x : $$F_Y(x) = P(Y \le x) = P\left(\frac{1}{\tan\theta} \le x\right).$$

D'où :

- $\forall x \in]-\infty,\ 0[$,

$$F_Y(x) = P(\tfrac{1}{x} \le \tan\theta < 0) = P(\tfrac{1}{x} \le T < 0)$$

$$(\ \forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall b \in \mathbb{R}_-^*,\quad \frac{1}{a} \le b \iff \frac{1}{b} \le a < 0),$$

$$F_Y(x) = P(\tfrac{1}{x} < X \le 0) \text{ car } T \text{ suit la même loi que } X \text{ et } X \text{ est à densité,}$$

$$F_Y(x) = F_X(0) - F_X(\tfrac{1}{x}) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(\tfrac{1}{x})\right) \underset{\mathbf{A.2.}}{=} -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x)\ ;$$

- $\forall x \in]0,\ +\infty[$,

$$F_Y(x) = P(\tan\theta < 0) + P(\tan\theta \ge \tfrac{1}{x}) = P(\tan\theta < 0) + 1 - P(\tan\theta < \tfrac{1}{x}) = P(X \le 0) + 1 - P(X \le \tfrac{1}{x})$$

$$(\ \forall a \in \mathbb{R}^*,\ \forall b \in \mathbb{R}_+^*,\quad \frac{1}{a} \le b \iff \left(a < 0 \text{ ou } a \ge \frac{1}{b}\right)),$$

$$F_Y(x) = \frac{1}{2} + 1 - F_X(\tfrac{1}{x}) = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(\tfrac{1}{x})\right) \underset{\mathbf{A.2.}}{=} 1 - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x).$$

- $F_Y(0) = P\left(\dfrac{1}{\tan\theta} \le 0\right) = P(\tan\theta < 0) = P(X < 0) = P(X \le 0) = F_X(0) = \dfrac{1}{2}$.

On a ainsi obtenu : $$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_Y(x) = F_X(x),$$

ce qui prouve que $\boxed{Y \text{ suit la même loi que } X}$.

3. S : la variable aléatoire représentant $(\varphi_D \circ \varphi_B)(z_N)$.

a. S est définie partout sauf sur l'événement $\{\theta = \frac{\pi}{4}\}$ de probabilité nulle.

- $\forall t \in \mathbb{R},\ F_S(t) = P(S \le t) = P\left(\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} \le t\right)$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,\ 1[$ et $]1,\ +\infty[$, de bijection réciproque : $\mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\},\ t \mapsto \dfrac{t-1}{t+1}$.

On en déduit :

•• $\forall t \in]-\infty, -1[$,

$$F_S(t) = P\left(1 < \tan\theta \le \frac{t-1}{t+1}\right) = P\left(1 < X \le \frac{t-1}{t+1}\right) = F_X\left(\frac{t-1}{t+1}\right) - F_X(1),$$

$$F_S(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{t-1}{t+1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(1)\right) = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{t-1}{t+1}\right) - \frac{1}{4}\ ;$$

•• $\forall t \in]-1,\ +\infty[$,

$$F_S(t) = 1 - P(S > t) = 1 - P\left(\frac{t-1}{t+1} < \tan\theta < 1\right) = 1 - P\left(\frac{t-1}{t+1} < X \le 1\right) = 1 - F_X(1) + F_X\left(\frac{t-1}{t+1}\right),$$

$$F_S(t) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\ ;$$

•• $F_S(-1) = P(1 < \tan\theta) = 1 - P(\tan\theta \le 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

En résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = -1 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

- F_S est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, +\infty[$.

  Sans difficulté : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} F_S(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} F_S(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$,

  donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} F_S(x) = F_S(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} F_S(x)$, ce qui prouve que F_S est continue en -1.

  Finalement, F_S est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1, donc :

  $$\boxed{S \text{ est une variable aléatoire à densité}}.$$

- On sait que toute fonction positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F_S' sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ est une densité de S.

  Notons φ la fonction : $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. On a, pour tout réel x distinct de -1 :

  $$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1},$$

  $$\varphi'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = \frac{2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} = \frac{2}{2x^2 + 2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

  On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $F_S'(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} f(x)$, où $\frac{1}{\pi} f$ est une densité de X,

  donc $\boxed{\frac{1}{\pi} f \text{ est également une densité de } S}$.

b. D'après les questions **2. a.** et **3. a.**, les variables aléatoires S et T suivent la même loi que X, donc :

$$\boxed{S \text{ et } T \text{ suivent la même loi}}.$$

4. Pour tous entiers naturels n et p : $(\varphi_{D^p} \circ \varphi_{C^n} \circ \varphi_B)(z_N) = \varphi_{D^p}\left(\varphi_{C^n}(\varphi_B(z_N))\right)$ et :

- la variable aléatoire T qui représente $\varphi_B(z_N)$ suit la même loi que X ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute variable aléatoire U suivant la même loi que X, $\varphi_C(U)$ suit la même loi que X et $\varphi_{C^n}(U) = U$ ou $\varphi_{C^n}(U) = \varphi_C(U)$ (**B. 4. c.**, **C. 2. b.**) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute variable aléatoire U suivant la même loi que X, $\varphi_{D^p}(U)$ suit la même loi que X (par récurrence, en utilisant que $\varphi_D(U)$ suit la même loi que X (**C. 3. b.**) et $\varphi_{D^{p+1}} = \varphi_D \circ \varphi_{D^p}$ (**B. 2. b.**)).

On en déduit :

$$\boxed{\text{quels que soient les entiers naturels } n \text{ et } p, \text{ la variable aléatoire représentant } (\varphi_{D^p} \circ \varphi_{C^n} \circ \varphi_B)(z_N) \text{ suit la même loi que } X.}$$

G2E 2013

PROBLÈME 2

Partie A : Une fonction

1. (E) : $y+(x-1)y'=\mathrm{e}^{-x}$ à résoudre sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.

Sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, (E) est équivalente à l'équation différentielle linéaire du premier ordre (F) :

$$y'+\frac{1}{x-1}y=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x-1},$$

de la forme $y'+a(x)y=b(x)$, où les fonctions a et b sont continues sur $]-\infty, 1[$.

a. Sur $]-\infty, 1[$, l'équation différentielle homogène (E_0) : $y+(x-1)y'=0$ associée à (E) est équivalente à l'équation différentielle homogène (F_0) : $y'+\dfrac{1}{x-1}y=0$ associée à (F).

La fonction A : $]-\infty, 1[\to\mathbb{R},\ x\mapsto \ln|x-1|$ est une primitive de la fonction a : $x\mapsto\dfrac{1}{x-1}$ et :

$$\forall x\in]-\infty,1[,\ \mathrm{e}^{-\ln|x-1|}=\frac{1}{|x-1|}=\frac{1}{1-x}.$$

On en déduit l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0) :

$$\boxed{\mathcal{S}_0=\left\{\left(]-\infty, 1[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{\lambda}{1-x}\right),\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(]-\infty, 1[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{\lambda}{x-1}\right),\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}}.$$

b. Appliquons la méthode « de variation de la constante » en déterminant une solution particulière f_p de (F) (et donc de (E)) sur $]-\infty, 1[$ de la forme $x\mapsto\dfrac{\lambda(x)}{x-1}$, où λ est une fonction dérivable sur $]-\infty, 1[$.

On a : $\forall x\in]-\infty,1[,\ f_p'(x)+\dfrac{1}{x-1}f_p(x)=\dfrac{\lambda'(x)}{x-1}$, donc :

$$\big(f_p \text{ est solution de } (E)\big)\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,1[,\ \frac{\lambda'(x)}{x-1}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x-1}\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,1[,\ \lambda'(x)=\mathrm{e}^{-x}.$$

On en déduit que la fonction : $]-\infty, 1[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{x-1}$ est une solution particulière de (E) sur $]-\infty, 1[$.

Notons que l'on peut écrire : $\forall x\in]-\infty,1[,\ \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{x-1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}(1-x)}$.

Sachant que la solution générale de (E) sur $]-\infty, 1[$ est la somme d'une solution particulière de (E) sur $]-\infty, 1[$ et de la solution générale de (E_0) sur $]-\infty, 1[$, on obtient l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $]-\infty, 1[$:

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\left(]-\infty, 1[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{\mathrm{e}^{x}(1-x)}+\frac{\lambda}{x-1}\right),\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}}.$$

2. $\forall x\in]-\infty, 1[,\quad f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}(1-x)}$

a. Pour tout réel λ, notons f_λ la fonction : $]-\infty, 1[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}(1-x)}+\dfrac{\lambda}{x-1}$.

On a les équivalences suivantes : $f_\lambda(0)=1\Leftrightarrow 1-\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=0$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est l'unique solution de } (E) \text{ satisfaisant à la condition initiale } y(0)=1}$.

b. • f est solution de (E), donc : $\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f(x)+(x-1)f'(x)=e^{-x}$. Il s'ensuit :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f'(x)=\frac{1}{x-1}\left(e^{-x}-f(x)\right)=\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^x(1-x)}\right)=\frac{x}{e^x(x-1)^2}.$$

Donc, sur $]-\infty, 1[$, $f'(x)$ est du signe de x, ce qui implique que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, 1[$.

• $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{-1}{x e^x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0^-$ (croissances comparées), donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Sans indétermination : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=+\infty$.

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

3. Pour tout x appartenant à $]-\infty, 1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}\times\frac{1}{1-x} \\ &= \left(1-x+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\left(1+x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right) \\ &= (1+x+x^2)+(-x-x^2)+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2), \end{aligned}$$

d'où : $$\boxed{f(x)=1+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}.$$

Partie B : Une suite

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note d_n le coefficient de x^n dans le développement de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre n.

1. **a.** La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$, donc f admet un développement limité en 0 à tout ordre, ce qui justifie que $\boxed{d_n \text{ existe pour tout } n\in\mathbb{N}}$.

b. D'après la formule de Taylor-Young, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\underset{x\to0}{o}(x^n)$.

On en déduit, par unicité du développement limité : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \quad d_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}}$.

On a : $d_0=\dfrac{f(0)}{0!}=\dfrac{1}{1}=1$, $d_1=\dfrac{f'(0)}{1!}=0$; de plus, on a déjà obtenu : $f(x)=1+\dfrac{1}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)$, ce qui conduit à : $d_2=\dfrac{1}{2}$ $\boxed{d_2=\dfrac{1}{2}}$.

$$\boxed{d_0=1, \ d_1=0, \ d_2=\frac{1}{2}}.$$

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction f étant solution de (E), elle vérifie :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f(x) + (x-1) f'(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On obtient alors en dérivant n fois, par linéarité de la dérivation :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f^{(n)}(x) + \frac{\mathrm{d}^n \left((x-1) f'(x)\right)}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}^n \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{d}x^n},$$

d'où, d'après la formule de Leibniz, qu'il est licite d'employer car $x \mapsto x-1$ et f sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$:

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k (x-1)}{\mathrm{d}x^k} f^{(n+1-k)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x},$$

c'est-à-dire : $\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f^{(n)}(x) + (x-1) f^{(n+1)}(x) + n f^{(n)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x}$.

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-\infty, 1[, \quad (n+1) f^{(n)}(x) + (x-1) f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x}}.$$

b. Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1) f^{(n)}(0) - f^{(n+1)}(0) = (-1)^n,$$

donc, d'après **B. 1. b.** : $\underbrace{(n+1)\, n!}_{(n+1)!}\, d_n - (n+1)!\, d_{n+1} = (-1)^n$,

d'où : $(n+1)!\, d_{n+1} = (n+1)!\, d_n - (-1)^n = (n+1)!\, d_n + (-1)^{n+1}$.

Il s'ensuit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = d_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}}$.

Partie C : Trois chapeaux

Trois invités, trois chapeaux redistribués de façon aléatoire.

X : nombre d'invités ayant retrouvé leur propre chapeau.

1. **a.** Numérotons A_1, A_2, A_3 les personnes invitées.

En considérant qu'un résultat de l'expérience aléatoire est la liste (i, j, k) telle que A_1, A_2, A_3 repartent respectivement avec le chapeau de A_i, A_j, A_k :

> l'univers Ω est l'ensemble des permutions des éléments de $\{1, 2, 3\}$,
>
> tous les événements élémentaires sont équiprobables,
>
> $\mathrm{Card}(\Omega) = 3! = 6$.

b. $\boxed{\Omega = \{ (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1) \}}$.

c. On obtient alors sans difficulté le tableau de la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$1/3$	$1/2$	0	$1/6$

2. Avec des notations standard :

a. $$\boxed{\mathrm{E}(X) =} \sum_{k=0}^{3} k\,P(X=k) = 1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6} = \boxed{1},$$

b. $\mathrm{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2\,P(X=k) = 1\times\frac{1}{2}+9\times\frac{1}{6} = 2$, donc, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\boxed{\mathrm{V}(X) =} \ \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = 2-1 = \boxed{1}\ .$$

Partie D : n chapeaux

$n \in \mathbb{N}^*$, n invités, redistribution aléatoires des n chapeaux.

X_n : nombre d'invités ayant retrouvé leur propre chapeau, $p_n = P(X_n = 0)$.

Notons que bien évidemment X_n prend ses valeurs dans $[\![0,\ n]\!]$.

On prend pour univers Ω associé à l'expérience aléatoire étudiée l'ensemble des permutations des éléments de $[\![1,\ n]\!]$, que l'on munit de la loi de probabilité uniforme P. On a : $\mathrm{Card}(\Omega) = n!$.

1. **a.**
- Lorsqu'il n'y a qu'un seul invité, celui-ci repart avec son propre chapeau, donc : $\boxed{p_1 = 0}$.
- Lorsqu'il n'y a que deux invités, de façon équiprobable soit chacun repart avec son propre chapeau, soit chacun repart avec le chapeau de l'autre invité, donc : $\boxed{p_2 = \frac{1}{2}}$.
- D'après **C. 1. c.** : $P(X_3 = 0) = \frac{1}{3}$, donc : $\boxed{p_3 = \frac{1}{3}}$.

b. Les résultats qui réalisent l'événements $(X_4 = 0)$ sont :

$$(2,1,4,3),\ (2,3,4,1),\ (2,4,1,3),$$
$$(3,1,4,2),\ (3,4,1,2),\ (3,4,2,1),$$
$$(4,1,2,3),\ (4,3,1,2),\ (4,3,2,1).$$

Donc : $$\boxed{p_4 =}\ \frac{9}{4!} = \frac{3\times 3}{4\times 3\times 2} = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

2. Par convention $p_0 = 1$.

a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

- Si $k = n$, alors la relation à démontrer s'écrit : $P(X_n = n) = \frac{1}{n!}$, ce qui est vrai puisque $(X_n = n)$ est l'événement élémentaire : « chaque invité repart avec son propre chapeau ».
- Supposons maintenant $k \neq n$ ($n-k$ est ainsi un entier supérieur ou égal à 1). Construire une redistribution des chapeaux qui réalise l'événement $(X_n = k)$, c'est :
  - •• choisir les k chapeaux qui repartiront avec leur propriétaire, il y a $\binom{n}{k}$ façons de le faire,
  - •• puis choisir une redistribution des $n-k$ chapeaux restants de telle sorte qu'aucun ne soit attribué à son propriétaire, il y a $\mathrm{Card}(X_{n-k} = 0)$ façons de le faire,

donc : $$\mathrm{Card}(X_n = k) = \binom{n}{k} \mathrm{Card}(X_{n-k} = 0).$$

Sachant que l'on dispose des égalités :

$$P(X_n = k) = \frac{\mathrm{Card}(X_n = k)}{n!}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad p_{n-k} = \frac{\mathrm{Card}(X_{n-k} = 0)}{(n-k)!},$$

on obtient : $$n! \times P(X_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times (n-k)!\, p_{n-k}.$$

On peut ainsi conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X_n = k) = \frac{p_{n-k}}{k!}}.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des valeurs prises par X_n est inclus dans $[\![0,\ n]\!]$, donc : $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$, autrement dit, d'après la question précédente : $\sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$. De plus, pour $n = 0$, l'assertion : « $\sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{k!} = 1$ » s'écrit : « $p_0 = 1$ », ce qui est vrai d'après la convention fixée par l'énoncé, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{k!} = 1}.$$

c.

- Par convention : $p_0 = 1$, et d'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} = 1,$$

donc, en isolant le terme de la somme correspondant à $k = 0$: $p_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!} = 1$, autrement dit :

$$p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}.$$

Il s'ensuit que la suite (p_n) vérifie les relations : $$\begin{cases} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}. \end{cases}$$

- De plus, d'après le principe de récurrence, ces relations permettent de calculer de proche en proche les termes de la suite (p_n), puisque dans la somme $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}$ ne figurent que des p_i avec $0 \le i \le n$.

En conclusion : $$\boxed{(p_n) \text{ est caractérisée par : } \begin{cases} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}. \end{cases}}$$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(X_n = k) \underset{\mathbf{D.2.a.}}{=} \sum_{k=0}^{n} k \frac{p_{n-k}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{n-k}}{(k-1)!} \underset{k+1 \leftarrow k}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_{n-(k+1)}}{k!},$$

d'où : $\mathrm{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_{(n-1)-k}}{k!}$, et d'après la question **D. 2. b.** : $\boxed{\mathrm{E}(X_n) = 1}$.

On peut interpréter ce résultat de la façon suivante :

$$\boxed{\text{en moyenne, un seul des invités repart avec son propre chapeau à la fin de la soirée}}\ .$$

b. X_1 est une variable aléatoire certaine, donc : $\mathrm{V}(X_1)=0$.

Soit maintenant n un entier supérieur ou égal à 2.

Commençons par calculer l'espérance de la variable aléatoire $(X_n-1)X_n$:

$$\mathrm{E}\big((X_n-1)X_n\big)=\sum_{k=0}^{n}(k-1)k\,P(X_n=k)=\sum_{k=0}^{n}(k-1)k\,\frac{p_{n-k}}{k!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{p_{n-k}}{(k-2)!}\underset{\boldsymbol{k+2\leftarrow k}}{=}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{p_{n-2-k}}{k!}=1\,.$$

De plus, par linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}\big((X_n-1)X_n\big)=\mathrm{E}(X_n^{\,2}-X_n)=\mathrm{E}(X_n^{\,2})-\mathrm{E}(X_n)$, donc :

$$\mathrm{E}(X_n^{\,2})=\mathrm{E}\big((X_n-1)X_n\big)+\mathrm{E}(X_n)=1+1=2\,.$$

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\boxed{\mathrm{V}(X_n)=}\ \mathrm{E}(X_n^{\,2})-\mathrm{E}^2(X_n)=2-1=\boxed{1}\,.$$

4. $\begin{cases} d_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad d_{n+1}=d_n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$

a. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, d'une part : $(1-1)^n=0^n\underset{n\geq 1}{=}0$, et d'autre part, d'après la formule du binôme :

$$(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k(-1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}.$$

On en déduit : $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}=0}\,.$$

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}=0$ ».

- $\mathcal{P}_0$ s'écrit : « $d_0=1$ », donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{d_{n+1-k}}{k!}=1$.

On a : $$\sum_{k=0}^{n+1}\frac{d_{n+1-k}}{k!}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{d_{(n-k)+1}}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{d_{(n-k)+1}}{k!}+\frac{d_0}{(n+1)!}\underset{\mathbf{B.2.b.}}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{d_{n-k}+\dfrac{(-1)^{n+1-k}}{(n+1-k)!}}{k!}+\frac{d_0}{(n+1)!},$$

d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{d_{n+1-k}}{k!}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{d_{n-k}}{k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n+1-k}}{k!(n+1-k)!}+\frac{d_0}{(n+1)!}\\&=1+\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}+\frac{1}{(n+1)!}\\&=1+\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}\,,\end{aligned}$$

enfin, d'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{n+1}\frac{d_{n+1-k}}{k!}=1,$$

ce qui prouve que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, on a démontré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!} = 1}.$$

c. On déduit de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!}$, donc la suite (d_n) vérifie :

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{d_{n+1-k}}{k!}, \end{cases}$$

et d'après la question **D. 2. c.** :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = d_n}.$$

5. a. $p_0 = 1$ et d'après la question précédente et la question **B. 2. b.** : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = p_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Un récurrence immédiate permet alors d'obtenir :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}.$$

b. On sait que, pour tout réel x, la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et a pour somme e^x, donc :

$$\boxed{\text{la suite } (p_n) \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} p_n = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}}.$$

Ainsi, pour de grandes valeurs de l'entier naturel n, la probabilité qu'aucun des invités ne retrouve son chapeau est proche de $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

-.- **FIN** -.-

(Ouf !)