SESSION 2012

CONCOURS G2E

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.
Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.

PROBLEME 1

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1.1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad 0 < f(x) \leq 1.$$

1.2. Montrer que, pour tout entier naturel n, non nul, et tout réel x strictement positif, on a :

$$\frac{x\,e^{-nx}}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x - 1} - \sum_{k=1}^{n} x\,e^{-kx}.$$

1.3. Déterminer, pour tout entier naturel n, non nul, et pour tout réel M strictement positif,

$$\int_0^M x\,e^{-nx}\,dx.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, non nul,

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-nx}\,dx$$

est convergente et donner sa valeur en fonction de n.

1.4. Donner, pour tout entier naturel n, non nul, et pour tout réel M, strictement positif, un encadrement de :

$$\int_0^M \frac{x\,e^{-nx}}{e^x - 1}\,dx.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, non nul :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,e^{-nx}}{e^x - 1}\,dx$$

est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x\,e^{-nx}}{e^x - 1}\,dx = 0.$$

1.5. Déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

PARTIE B

Soient $k\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathbb{R}$. On considère la variable aléatoire T qui donne, en jours, le délai entre la commande et la livraison d'un colis dans une société de vente par correspondance et on suppose qu'une densité de probabilité de T est la fonction g définie par :

$$g: t\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ A\ t\,e^{-kt} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1.6. Déterminer la valeur de A en fonction de k. Dans la suite du problème, A prendra cette valeur.

1.7. Dans cette question, on prend : $k = 2$.

1.7.a. Etudier la fonction g et établir son tableau de variations. Vous préciserez les coordonnées du maximum et vous donnerez une équation des demi-tangentes au point d'abscisse $t = 0$.

1.7.b. Tracer la courbe représentative de g.

1.7.c. Quelle est la probabilité pour qu'un colis soit livré en moins de trois jours ?

1.7.d. Quelle est la probabilité pour qu'un colis soit livré en plus de deux jours, sachant qu'il l'est en moins de cinq jours ?

1.8. Dans cette question, k est un entier naturel non nul quelconque.

1.8.a. Déterminer les réels α et β tels que la fonction $h: t\mapsto(\alpha t + \beta)\,e^{-kt}$ soit une primitive de g sur $\mathbb{R}^+$. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance de la variable aléatoire T.

1.8.b. Déterminer de même l'espérance de la variable aléatoire T^2. En déduire l'existence et la valeur de la variance de la variable aléatoire T.

PROBLEME 2

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 muni de sa base canonique $B = \{1, X, X^2\}$.

Pour tout entier k appartenant à $[\![0,2]\!]$ et tout entier i appartenant à $[\![0,k]\!]$, on note $P_{i,k}$ le polynôme de degré k , défini par :

$$\forall j \in [\![0,k]\!] - \{i\}, \quad P_{i,k}(j) = 0 \text{ et } P_{i,k}(i) = 1.$$

$P_{i,k}$ est donc le polynôme de degré k , qui vaut 1 en i et qui s'annule pour les autres valeurs entières comprises entre 0 et k.

2.1. Déterminer $(P_{i,2})_{0 \le i \le 2}$. Montrer que ces polynômes forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ que nous noterons B'.

2.2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées de P dans la base B'.

2.3. Déterminer $M_{B,B'}$, matrice de passage de la base B à la base B' et sans calcul explicite, déterminer l'inverse de $M_{B,B'}$.

2.4. Montrer que $M_{B,B'}$ est diagonalisable et qu'elle admet une valeur propre entière dont vous déterminerez l'espace propre associé.

2.5. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :

$$P(X) = P(0) + P(1)\,X + P(2)\,X^2.$$

2.6. Déterminer $(P_{i,i})_{0 \le i \le 2}$. Montrer que ces polynômes forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ que nous noterons B''.

2.7. Déterminer $M_{B,B''}$, matrice de passage de la base B à la base B''.

2.8. Déterminer, de deux façons différentes, $M_{B',B''}$ matrice de passage de la base B' à la base B''.

PROBLEME 3

Soient p_1, p_2 et p_3 des réels strictement positifs.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $D_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i + j \le n\}$ et la fonction de deux variables f définie sur D_n par :

$$f(i,j) = \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}\; p_1^i\, p_2^j\, p_3^{n-i-j}.$$

3.1. Montrer que pour tout couple (i,j) de D_n, on a :

$$\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}.$$

et :

$$\sum_{(i,j)\in D_n} f(i,j) = (\,p_1 + \,p_2 + p_3)^n.$$

Nous supposerons dans la suite du problème que : $p_1 + \,p_2 + p_3 = 1$.

On considère le couple de variables aléatoires (X,Y) dont la loi conjointe est définie pour tout $(i,j)\in D_n$ par :

$$P(X = i, Y = j) = f(i,j).$$

3.2. Déterminer les lois marginales des variables aléatoires X et Y.

3.3. En déduire les espérances mathématiques $E(X)$ et $E(Y)$, ainsi que les variances $V(X)$ et $V(Y)$, des variables aléatoires X et Y.

3.4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifiez votre réponse.

3.5. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $S = X + Y$.

3.6. En déduire la covariance de X et Y, ainsi que leur coefficient de corrélation.

3.7. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $j\in[\![1,n]\!]$. On définit la variable aléatoire X_j par :

$$P(\,X_j = i) = P(X = i \mid Y = j).$$

Déterminer la loi de probabilité de X_j .Reconnaître cette loi et en donner les paramètres.
Déterminer en fonction de n, j, p_1 et p_2, l'espérance $E(X_j)$ et la variance $V(\,X_j)$ de la variable aléatoire X_j.

3.8. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $i\in[\![1,n]\!]$. On définit la variable aléatoire Y_i par :

$$P(Y_i = j) = P(Y = j \mid X = i).$$

Déterminer la loi de probabilité de Y_i. Reconnaître cette loi et en donner les paramètres.
Déterminer en fonction de n, i, p_1 et p_2, l'espérance $E(Y_i)$ et la variance $V(Y_i)$ de la variable aléatoire Y_i.

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions affines u et v dont les restrictions à $[\![1,n]\!]$ sont définies, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, par :

$$u(i) = E(Y_i) \text{ et } v(i) = E(X_i).$$

Le plan affine étant rapporté à un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on appelle C et C' les courbes d'équations respectives $y = u(x)$ et $y = v(x)$.

3.9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que C et C' se coupent en un seul point. Déterminer alors les coordonnées de ce point.