Correction de l'épreuve de Mathématiques G2E 2012

Problème 1

Partie A

1. f est clairement continue sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0;+\infty[$.
   De plus, $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et donc $f(x) \sim_0 1$ et donc f est bien continue en 0.

   Comme exp est croissante, si $x > 0$, $e^x - 1 > e^0 - 1 = 0$ et donc $\forall x > 0,\ f(x) > 0$.
   Comme l'exponentielle est convexe, en utilisant la tangente en 0, on a $\forall x \in \mathbf{R},\ e^x \geq x + 1$.
   On a donc $e^x - 1 \geq x$ et, si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \leq 1$. L'inégalité est évidente en $x = 0$.

   $$\boxed{f \text{ est continue sur } [0;+\infty[\quad \text{et} \quad \forall x \in [0;+\infty[,\ 0 < f(x) \leq 1.}$$

2. Si $x > 0$, $e^{-x} \neq 1$ et on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{n} (e^{-x})^k = e^{-x}\frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1}$.

   On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} xe^{-kx} = \frac{x}{e^x - 1} - \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1}$ puis le résultat.

   $$\boxed{\text{pour tout } n > 0 \text{ et tout } x > 0,\ \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x - 1} - \sum_{k=1}^{n} xe^{-kx}.}$$

3. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $M > 0$. On calcule cette intégrale classique par une intégration par parties (toutes les fonctions en présence étant indéfiniment dérivables sur $[0;M]$) :

   $$\int_0^M xe^{-nx}\mathrm{d}x = \left[x\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^M + \frac{1}{n}\int_0^M e^{-nx}\mathrm{d}x = -\frac{Me^{-nM}}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^M.$$

   On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall M > 0,\ \displaystyle\int_0^M xe^{-nx} = -\frac{Me^{-nM}}{n} - \frac{e^{-nM}}{n^2} + \frac{1}{n^2}.}$

   Si $n \neq 0$, on a $\displaystyle\lim_{M \to +\infty} e^{-nM} = 0$ et, d'après les croissances comparées, $\displaystyle\lim_{M \to +\infty} Me^{-nM} = 0$.

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{M \to +\infty} \int_0^M xe^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$.

   $$\boxed{\text{pour tout } n > 0, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } \frac{1}{n^2}.}$$

4. D'après la question 1., on a $\forall x \geq 0,\ 0 \leq f(x)e^{-nx} \leq e^{-nx}$.
En utilisant la croissance de l'intégrale, on a donc

$$\forall M > 0,\ 0 \leq \int_0^M f(x)e^{-nx}\mathrm{d}x \leq \int_0^M e^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1-e^{-nM}}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^M \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\mathrm{d}x$ est ici faussement impropre en 0 et vaut $\displaystyle\int_0^M f(x)e^{-nx}\mathrm{d}x$.

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall M > 0,\ \displaystyle\int_0^M \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}.}$

On a vu que la fonction $x \longmapsto \dfrac{xe^{-nx}}{e^x-1}$ est positive sur $]0;+\infty[$.
On en déduit que la fonction $M \longmapsto \displaystyle\int_0^M \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\mathrm{d}x$ est croissante sur $]0;+\infty[$.
Or, on vient de voir qu'elle est majorée par $1/n$ sur $]0;+\infty[$.
Elle admet donc une limite finie inférieure à $1/n$ en $+\infty$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\mathrm{d}x \text{ est donc convergente.}}$$

Comme alors $\forall n > 0,\ 0 \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$, et d'après le théorème d'encadrement,

on a donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\mathrm{d}x = 0.}$

5. On remarque que f est bien continue sur $[0;+\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est donc seulement généralisée au voisinage de $+\infty$.

Mais $f(x) \underset{+\infty}{\sim} xe^{-x}$. D'après les croissances comparées, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x/2}f(x) = 0$.
Il existe donc une constante $C > 0$ telle que $\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 \leq f(x) \leq Ce^{-x/2}$.
En utilisant le critère de convergence des intégrales généralisées de fonctions positives,

on trouve que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$

D'après la question 2., et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a, puisque toutes les intégrales généralisées en présence sont convergentes,

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} xe^{-kx}\mathrm{d}x.$$

On en déduit donc que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}.$$

Finalement, en utilisant la question 4., $\boxed{\displaystyle\sum \frac{1}{k^2} \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.}$

Partie B

6. On remarque au préalable que g est bien continue et positive sur $\mathbf{R}$.
De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = A\int_{0}^{+\infty} te^{-kt}\mathrm{d}t$ converge d'après la question 3. et vaut $\dfrac{A}{k^2}$.

$\boxed{g \text{ est donc une densité de probabilité si et seulement si } A = k^2.}$

7. Ici, $k = 2$, on a donc $g : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

a. g est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et $\forall t \in \mathbf{R}^*,\ g'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 4(1-2t)e^{-2t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$

Sur $\mathbf{R}_+$, on a alors le tableau de variations suivant :

t	0		$1/2$		$+\infty$
signe de $g'(t)$		$+$	0	$-$	
variations de g	0	$\nearrow$	$2/e$	$\searrow$	0

$\boxed{\text{Le maximum de la courbe représentative de } g \text{ se situe au point } \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right).}$

On peut alors montrer que g est dérivable à gauche et à droite en 0 de dérivées

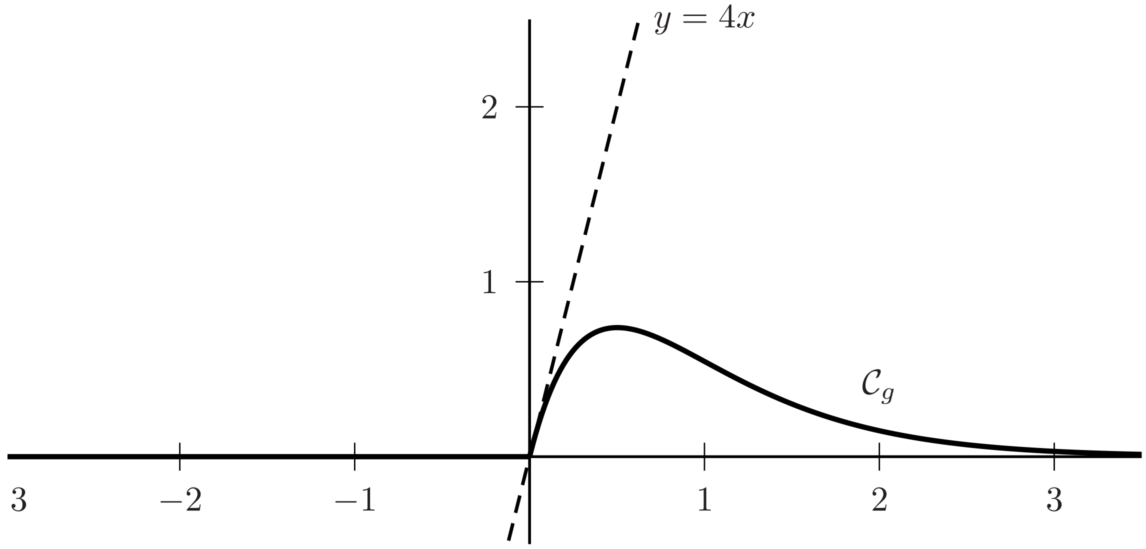
$$g'_g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g'_d(0) = 4.$$

(étude des taux d'accroissements ou application sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$ du théorème de la fonction $\mathcal{C}^1$)

Le courbe $\mathcal{C}_g$ admet en l'origine les deux demi-tangentes d'équations respectives

$$\boxed{y = 0 \quad \text{et} \quad y = 4x.}$$

b. La courbe représentative de g :



c. L'événement « le colis est livré en moins de trois jours » correspond à $(T \leq 3)$ et on calcule

$$\mathbf{P}(T \leq 3) = \int_{-\infty}^{3} g(t)\mathrm{d}t = 4\int_0^3 te^{-2t}\mathrm{d}t.$$

En utilisant alors la question 3., on a donc

$$\mathbf{P}(T \leq 3) = 4\left(-\frac{3e^{-2\times 3}}{2} - \frac{e^{-2\times 3}}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 - 7e^{-6}.$$

$\boxed{\text{La probabilité que le colis soit livré en moins de trois jours est de } 1 - 7e^{-6}.}$

d. On cherche ici $\mathbf{P}(T \geq 2 | T \leq 5) = \dfrac{\mathbf{P}(2 \leq T \leq 5)}{\mathbf{P}(T \leq 5)}$.
Or, toujours en appliquant la question 3, on trouve que

$$\mathbf{P}(T \leq 5) = 4\int_0^5 te^{-2t}\mathrm{d}t = 4\left(-\frac{5e^{-2\times 5}}{2} - \frac{e^{-2\times 5}}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 - 11e^{-10}.$$

De même, on calcule que

$$\mathbf{P}(T \leq 2) = 4\int_0^2 te^{-2t}\mathrm{d}t = 4\left(-\frac{2e^{-2\times 2}}{2} - \frac{e^{-2\times 2}}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 - 5e^{-4}.$$

Or, $\mathbf{P}(2 \leq T \leq 5) = \mathbf{P}(T \leq 5) - \mathbf{P}(T < 2) = \mathbf{P}(T \leq 5) - \mathbf{P}(T \leq 2)$ car T est à densité.
On en déduit que $\mathbf{P}(2 \leq T \leq 5) = 5e^{-4} - 11e^{-10}$ et donc $\boxed{\mathbf{P}(T \geq 2 | T \leq 5) = \dfrac{5e^{-4} - 11e^{-10}}{1 - 11e^{-10}}.}$

8. a. Soit $h : t \longmapsto (\alpha t + \beta)e^{-kt}$.
h est clairement dérivable et $\forall t,\ h'(t) = (-k\alpha t - k\beta + \alpha)e^{-kt}$.

Supposons alors h primitive de g sur $\mathbf{R}_+$. On a donc

$$\forall t \geq 0,\ (-k\alpha t - k\beta + \alpha)e^{-kt} = k^2 te^{-kt} \quad \text{et donc} \quad \forall t \geq 0,\ -k\alpha t - k\beta + \alpha = k^2 t.$$

En identifiant alors les coefficients de ces deux polynômes en t admettant une infinité de racines, on a donc $\begin{cases} -k\alpha = k^2 \\ -k\beta + \alpha = 0 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} \alpha = -k \\ \beta = -1. \end{cases}$
On trouve que $h : t \longmapsto -(kt + 1)e^{-kt}$.

On vérifie ensuite que h est bien une primitive de g sur $\mathbf{R}_+$.

$\boxed{\text{Les seuls et uniques } \alpha \text{ et } \beta \text{ solutions sont } \alpha = -k \text{ et } \beta = -1.}$

T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tg(t)\mathrm{d}t$ converge.
Si $M > 0$, et à l'aide d'une intégration par parties, on calcule

$$\int_0^M tg(t)\mathrm{d}t = \big[th(t)\big]_0^M - \int_0^M h(t)\mathrm{d}t = -M(kM + 1)e^{-kM} + k\int_0^M te^{-kt}\mathrm{d}t + \int_0^M e^{-kt}\mathrm{d}t$$

Or $\lim\limits_{M\to+\infty} M(kM+1)e^{-kM} = 0$ d'après les croissances comparées.
De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-kt}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kt}\mathrm{d}t$ convergent et valent respectivement $\dfrac{1}{k^2}$ et $\dfrac{1}{k}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tg(t)\mathrm{d}t$ est donc bien convergente et

$\boxed{T \text{ admet une espérance et } \mathbf{E}(T) = k\dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{k} = \dfrac{2}{k}.}$

b. T^2 admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2 g(t)\mathrm{d}t$ converge.
Pour $M > 0$, et en procédant à une intégration par parties, on a

$$\int_0^M t^2 g(t)\mathrm{d}t = \left[t^2 h(t)\right]_0^M - \int_0^M 2th(t)\mathrm{d}t$$

Toujours à l'aide des croissances comparées et de la convergence des intégrales

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-kt}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\mathbf{E}(T) = \frac{2}{k^3} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} te^{-kt}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$

$\boxed{T^2 \text{ admet une espérance et } \mathbf{E}(T^2) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} t(kt+1)e^{-kt}\mathrm{d}t = 2k\frac{2}{k^3} + \frac{2}{k^2} = \frac{6}{k^2}.}$

On en déduit alors que $\boxed{T \text{ admet une variance et } \mathbf{V}(T) = \dfrac{6}{k^2} - \dfrac{4}{k^2} = \dfrac{2}{k^2}.}$

Problème 2

1. On a $P_{0,2} = \dfrac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)}$, $P_{1,2} = \dfrac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)}$ et $P_{2,2} = \dfrac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)}$.

   On trouve donc $\boxed{P_{0,2} = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{3}{2}X + 1, \ \ P_{1,2} = -X^2 + 2X \ \text{ et } \ P_{2,2} = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X.}$

   Montrons que cette famille est libre. Soient a, b et c trois réels tels que

   $$aP_{0,2} + bP_{1,2} + cP_{2,2} = 0.$$

   En appliquant cette égalité en 0, 1 et 2, on trouve immédiatement que $a = b = c = 0$.
   Cette famille est donc libre, constituée de trois vecteurs de $\mathbf{R}_2[X]$ qui est de dimension 3

   $\boxed{B' = (P_{0,2}, P_{1,2}, P_{2,2}) \text{ est donc une base de } \mathbf{R}_2[X].}$

2. Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Soit $Q = P(0)P_{0,2} + P(1)P_{1,2} + P(2)P_{2,2}$. Remarquons que

   $$P(0) = Q(0), \quad P(1) = Q(1) \quad \text{et} \quad P(2) = Q(2).$$

   P et Q sont donc deux polynômes de degré 2 égaux en au moins trois points, on a donc $P = Q$.

   $\boxed{\text{Les coordonnées de } P \text{ dans la base } B' \text{ sont donc } P(0),\ P(1) \text{ et } P(2).}$

3. Comme $M_{B,B'}$ est la matrice des coordonnées des vecteurs de la base B' exprimés dans la base B, on trouve, en utilisant la question 1., que $\boxed{M_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.}$

   On sait que l'inverse de $M_{B,B'}$ est $M_{B',B}$ matrice de passage de la base B' à la base B.
   Or, il s'agit de la matrice des coordonnées des vecteurs de B exprimés dans la base B'.

   On trouve donc, en utilisant la question 2. que $\boxed{M_{B,B'}^{-1} = M_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.}$

4. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On calcule, en faisant $L_2 \leftarrow L_2 + (2-\lambda)L_3$:

$$\mathrm{Rg}(M_{B,B'} - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -3/2 & 2-\lambda & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1/2-\lambda/2 & 0 & \lambda^2 - 5\lambda/2 + 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}$$

   On résout alors $\lambda^2 - 5\lambda/2 + 1/2 = 0 \iff \lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$.

   $\boxed{M_{B,B'} \text{ a donc trois valeurs propres } 1,\ \dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \text{ et } \dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \text{ dont seule 1 est entière.}}$

   On résout alors $M_{B,B'}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x + y - \dfrac{1}{2}z = 0 \\ \dfrac{1}{2}x - y - \dfrac{1}{2}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = x \end{cases}$.

   $\boxed{\text{L'espace propre de } M_{B,B'} \text{ associé à la valeur propre 1 est donc engendré par } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$

5. Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Notons $Q(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.
   On a $\mathcal{M}_B(Q) = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{B'}(P)$ d'après la question 2.
   En utilisant les formules de changement de base, on a $\mathcal{M}_B(Q) = M_{B,B'}\mathcal{M}_{B'}(Q)$.
   On trouve donc que $M_{B,B'}\mathcal{M}_{B'}(Q) = \mathcal{M}_{B'}(P)$.

   On a donc

$$\begin{aligned} P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 &\iff M_{B,B'}\mathcal{M}_{B'}(P) = \mathcal{M}_{B'}(P) \\ &\iff \mathcal{M}_{B'}(P) \in E_1(M_{B,B'}) \\ &\iff \mathcal{M}_{B'}(P) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbf{R} \\ &\iff P(0) = \lambda,\ P(1) = \lambda \text{ et } P(2) = -\lambda,\ \lambda \in \mathbf{R} \\ &\iff P(X) = \lambda + \lambda X - \lambda X^2,\ \lambda \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{\lambda + \lambda X - \lambda X^2\ :\ \lambda \in \mathbf{R}\}.}$

6. On calcule $\boxed{P_{0,0} = 1, \ \ P_{1,1} = X \ \text{ et } \ P_{2,2} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X.}$

   Comme $B'' = (P_{0,0}, P_{1,1}, P_{2,2})$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés, elle est libre. Comme il s'agit d'une famille libre de trois vecteurs de $\mathbf{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, $\boxed{B'' = (P_{0,0}, P_{1,1}, P_{2,2}) \text{ est une base de } \mathbf{R}_2[X].}$

7. On a $P_{0,0} = 1$, $P_{1,1} = X$ et $P_{2,2} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$. On trouve alors que $\boxed{M_{B,B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.}$

8. *Première façon :* on cherche à exprimer les vecteurs de B'' dans la base B'.

   On a $P_{0,0} = 1 = P_{0,2} + P_{1,2} + P_{2,2}$, $P_{1,1} = X = P_{1,2} + 2P_{2,2}$ et $P_{2,2} = P_{2,2}$.

   On trouve alors que $M_{B',B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Seconde façon : on utilise la formule $M_{B',B''} = M_{B',B}M_{B,B''}$.

   On calcule $M_{B',B}M_{B,B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   On trouve que $\boxed{M_{B',B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.}$

Problème 3

1. Soit $(i, j) \in D_n$. On calcule

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \times \frac{(n-i)!}{(n-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in D_n, \ \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}.}$$

   On calcule ensuite, en utilisant cette nouvelle écriture :

$$\sum_{(i,j)\in D_n} f(i,j) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} p_1^i\, p_2^j\, p_3^{n-i-j} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} p_1^i \sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j} p_2^j\, p_3^{(n-i)-j}$$

   En appliquant alors deux fois la formule du binôme de Newton, on trouve que

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in D_n} f(i,j) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} p_1^i (p_2+p_3)^{n-i} = (p_1+p_2+p_3)^n.}$$

2. On remarque que, comme $(X,Y)(\Omega) = D_n$, on a $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

   Soit alors $i \in [\![0;n]\!]$. On calcule, à l'aide du système complet associé à Y et de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=i) &= \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\mathbf{P}(X=i,Y=j)}_{=0 \text{ si } j>n-i} = \sum_{j=0}^{n-i} f(i,j) = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} p_1^i\, p_2^j\, p_3^{n-i-j} \\ &= \binom{n}{i} p_1^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} p_2^j\, p_3^{(n-i)-j} \\ &= \binom{n}{i} p_1^i (p_2+p_3)^{n-i} \quad \text{en appliquant la formule du binôme}\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{On reconnaît que } X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p_1.}$

   En remarquant la symétrie entre i et j dans la question 1., on a aussi, pour $0 \leq i+j \leq n$,

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i}.$$

   Soit alors $j \in [\![0;n]\!]$. On calcule comme précédemment,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=j) &= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\mathbf{P}(X=i,Y=j)}_{=0 \text{ si } i>n-j} = \sum_{i=0}^{n-j} f(i,j) = \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n}{j}\binom{n-j}{i} p_1^i\, p_2^j\, p_3^{n-i-j} \\ &= \binom{n}{j} p_2^j \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} p_1^i\, p_3^{(n-j)-i} = \binom{n}{j} p_2^j (p_1+p_3)^{n-j} \text{ en appliquant la formule du binôme}\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{On reconnaît que } X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p_2.}$

3. De la question précédente, on a immédiatement

   $\boxed{\mathbf{E}(X) = np_1,\ \mathbf{E}(Y) = np_2,\ \mathbf{V}(X) = np_1(1-p_1) \text{ et } \mathbf{V}(Y) = np_2(1-p_2).}$

4. Comme $n \in \mathbf{N}^*$, $n+n > n$. On a donc $\mathbf{P}(X=n, Y=n) = 0$.
   Or, d'après 2., $\mathbf{P}(X=n) \neq 0$ et $\mathbf{P}(Y=n) \neq 0$.
   On a donc $\mathbf{P}(X=n,Y=n) \neq \mathbf{P}(X=n)\mathbf{P}(Y=n)$ et $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

5. Comme $(X,Y)(\Omega) = D_n$, i.e. $0 \leq X+Y \leq n$, on a nécessairement $S(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.
   Soit $k \in [\![0;n]\!]$. On décompose l'événement $S=k$ dans le système complet associé à X :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S=k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(S=k, X=i) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X+Y=k, X=i) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\mathbf{P}(X=i, Y=k-i)}_{=0 \text{ si } k-i<0} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!} p_1^i\, p_2^{k-i}\, p_3^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_3^{n-k} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} p_1^i p_2^{k-i} \\ &= \binom{n}{k} p_3^{n-k} (p_1+p_2)^k \text{ en appliquant la formule du binôme.}\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{On reconnaît que } S \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p_1+p_2.}$

6. On a donc $\mathbf{V}(S) = n(p_1+p_2)(1-p_1-p_2) = n(p_1+p_2)p_3$.
Mais on sait que $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + 2\mathbf{cov}(X,Y) + \mathbf{V}(Y)$.
On en déduit que $\mathbf{cov}(X,Y) = \dfrac{1}{2}\big(n(p_1+p_2)p_3 - np_1(1-p_1) - np_2(1-p_2)\big)$.
On a donc $\boxed{\mathbf{cov}(X,Y) = -n\,p_1\,p_2 \text{ et donc } \rho(X,Y) = -\sqrt{\dfrac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}.}$

7. Soit $i \in [\![0;n]\!]$. On calcule
$$\mathbf{P}(X_j = i) = \frac{\mathbf{P}(X=i, Y=j)}{\mathbf{P}(Y=j)}$$
Si $i > n-j$, on a $i+j>n$ et donc $\mathbf{P}(X_j = i) = 0$.
Si $i \leq n-j$, on a
$$\mathbf{P}(X_j = i) = \frac{\binom{n}{j}\binom{n-j}{i}p_1^i\,p_2^jp_3^{n-i-j}}{\binom{n}{j}p_2^j(1-p_2)^{n-j}} = \binom{n-j}{i}\frac{p_1^i\,p_3^{n-i-j}}{(1-p_2)^{n-j}} = \binom{n-j}{i}\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^i\left(\frac{p_3}{1-p_2}\right)^{(n-j)-i}$$
Remarquons enfin que $\dfrac{p_1}{1-p_2} + \dfrac{p_3}{1-p_2} = \dfrac{p_1+p_3}{1-p_2} = \dfrac{1-p_2}{1-p_2} = 1$.

$\boxed{\text{On reconnaît que } X_j \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n-j \text{ et } \dfrac{p_1}{1-p_2}.}$

On sait alors que $\boxed{\mathbf{E}(X_j) = \dfrac{(n-j)p_1}{1-p_2} \text{ et } \mathbf{V}(X_j) = \dfrac{(n-j)p_1(1-p_1-p_2)}{(1-p_2)^2}.}$

8. Soit $j \in [\![0;n]\!]$. On calcule
$$\mathbf{P}(Y_i = j) = \frac{\mathbf{P}(Y=j, X=i)}{\mathbf{P}(X=i)}$$
Si $j > n-i$, on a $i+j>n$ et donc $\mathbf{P}(Y_i = j) = 0$.
Si $j \leq n-i$, on a
$$\mathbf{P}(Y_i = j) = \frac{\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p_1^i\,p_2^jp_3^{n-i-j}}{\binom{n}{i}p_1^i(1-p_1)^{n-i}} = \binom{n-i}{j}\frac{p_2^j\,p_3^{n-i-j}}{(1-p_1)^{n-i}} = \binom{n-i}{j}\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^j\left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{(n-i)-j}$$
Remarquons enfin que $\dfrac{p_2}{1-p_1} + \dfrac{p_3}{1-p_1} = \dfrac{p_2+p_3}{1-p_1} = \dfrac{1-p_1}{1-p_1} = 1$.

$\boxed{\text{On reconnaît que } Y_i \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n-i \text{ et } \dfrac{p_2}{1-p_1}.}$

On sait alors que $\boxed{\mathbf{E}(Y_i) = \dfrac{(n-i)p_2}{1-p_1} \text{ et } \mathbf{V}(Y_i) = \dfrac{(n-i)p_2(1-p_1-p_2)}{(1-p_1)^2}.}$

9. Les prolongements considérés sont

$$u : x \longmapsto \frac{(n-x)p_2}{1-p_1} \quad \text{et} \quad v : x \longmapsto \frac{(n-x)p_1}{1-p_2}.$$

Les droites qui représentent u et v se coupent en un unique point si et seulement si leurs coefficients directeurs sont distincts. On résout alors

$$-\frac{p_2}{1-p_1} = -\frac{p_1}{1-p_2} \iff p_1(1-p_1) = p_2(1-p_2) \iff (p_1-p_2)(1-p_1-p_2) = 0$$

Or, on sait que $1 - p_1 - p_2 = p_3 \neq 0$.

$\boxed{C \text{ et } C' \text{ se coupent en un seul point si et seulement si } p_1 \neq p_2.}$

On suppose alors $p_1 \neq p_2$. Pour trouver le point d'intersection de C et C', il faut résoudre

$$\frac{(n-x)p_2}{1-p_1} = \frac{(n-x)p_1}{1-p_2}$$

Ici, on sait qu'il n'y a qu'un seul x solution et $x = n$ l'est clairement.

$\boxed{\text{Si } p_1 \neq p_2,\ C \text{ et } C' \text{ se coupent uniquement au point } (n;0).}$