SESSION 2011

CONCOURS G2E

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.
Le sujet est composé de 3 problèmes indépendants.

PROBLEME 1

Soit n un entier naturel et λ un nombre réel strictement positif.

On considère la fonction f_n définie par :

$$\begin{cases} f_n(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f_n(t) = \lambda^2\, t^n\, e^{-\lambda t} & \text{pour } t \geq 0. \end{cases}$$

1.1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, f_n est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

1.2. En considérant que, pour tout entier naturel n, une primitive de f_n sur $[0, +\infty[$ est de la forme : $t \mapsto P(t)\, e^{-\lambda t}$ où P est un polynôme, justifier que $\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$ est convergente.
Donner une relation entre $\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)\, dt$.

1.3. Calculer, pour tout entier naturel n, $\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$.

1.4. Montrer que f_1 est une densité de probabilité.

1.5. Soit p un entier naturel non nul. On considère p variables aléatoires réelles T_i où i varie de 1 à p. Ces variables aléatoires sont indépendantes et ont la même densité de probabilité f définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) = \lambda^2\, t\, e^{-\lambda t} & \text{pour } t \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour i appartenant à $[\![1, p]\!]$, T_i admet une espérance et une variance et les calculer.

1.6. La variable aléatoire T_i représente la durée de vie du $i^{\text{ième}}$ élément d'un système S comportant p éléments. On suppose que le système S tombe en panne lorsque l'un de ses éléments tombe en panne. On dit que le système S est en série.
On note T l'instant où S tombe en panne.
Déterminer la fonction de répartition et une densité de probabilité de T.

1.7. Soit V un système comportant deux éléments de durées de vie respectives T_1 et T_2. On suppose que le système V tombe en panne uniquement si ses deux éléments tombent en panne. On dit que le système V est un système en parallèle.
Soit W l'instant où V tombe en panne.
Déterminer la fonction de répartition et une densité de probabilité de W.

1.8. Pour i égal à 1 ou 2, comparer les probabilités des évènements $(T_i \geq t), (T \geq t)$ et $(W \geq t)$. Que peut-on en conclure quant à la fiabilité des différents systèmes ?

1.9. Soit q un entier naturel non nul et µ un nombre réel strictement positif différent de λ. On considère q variables aléatoires réelles U_j où j varie de 1 à q. Ces variables aléatoires sont indépendantes et ont la même densité de probabilité g définie par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ g(t) = \mu^2\, t\, e^{-\mu t} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}.$$

On mélange p éléments de durée de vie T_i et q éléments de duré de vie U_j. On choisit au hasard un élément de ce mélange. On note X sa durée de vie.

a. Déterminer une densité de probabilité de X.

b. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

c. Montrer que X admet une variance et la calculer.

PROBLEME 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 2. On notera I_E l'identité sur E.
On considère un endomorphisme de E, f, tel qu'il existe n vecteurs de E, $(v_i)_{0\leq i\leq n-1}$, générateurs de E, distincts deux à deux et vérifiant :

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } i \in [\![0, n-2]\!] \\ v_0 & \text{si } i = n-1 \end{cases}$$

On posera par convention : $v_n = v_0$.

Pour tout entier naturel p non nul, on pose : $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{on compose p fois}}$.

2.1. On considère f défini sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f: (x, y) \mapsto (-y, x).$$

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, tel qu'il existe un entier naturel n, non nul et n vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $(v_i)_{0\leq i\leq n-1}$, générateurs de $\mathbb{R}^2$, distincts deux à deux et vérifiant :

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } i \in [\![0, n-2]\!] \\ v_0 & \text{si } i = n-1 \end{cases}$$

b. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et calculer ses valeurs propres.

2.2. Montrer que $f^n = I_E$ et que pour tout entier p, tel que $0 < p < n$, on a : $f^p \neq I_E$.

2.3. En déduire que les valeurs propres possibles de f dans $\mathbb{C}$ sont : $e^{\frac{2ip\pi}{n}}$ où $p \in [\![0, n-1]\!]$.

2.4. Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, v_i n'est pas vecteur propre de f.

2.5. En déduire que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, (v_i, v_{i+1}) est une base de E et qu'il existe deux réels a_i et b_i tels que la matrice de f dans cette base soit :

$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ 1 & b_i \end{pmatrix}.$$

2.6. Soient deux entiers distincts, i et j, appartenant à $[\![0, n-1]\!]$, comparer les matrices M_i et M_j.

PROBLEME 3

Partie A

Soit un nombre réel a vérifiant $0 < a < 1$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant : $u_0 = 0$, $u_1 \neq 0$ et pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$,

$$u_n = a\, u_{n+1} + (1-a)\, u_{n-1}.$$

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_{n+1} - u_n.$$

3.1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison r en fonction de a. A quelle condition sur a, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle constante ? Dans ce cas, déterminer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n et de u_1.

3.2. On pose pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A de $M_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = AU_n$$

3.3. Montrer que, pour tout a, 1 est valeur propre de A et qu'il existe une unique valeur de a, notée a_0 pour laquelle A n'est pas diagonalisable.

3.4. Pour a différent de a_0, déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.

3.5. En déduire, pour a différent de a_0 et pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, une expression de u_n en fonction de u_1, a et n.

3.6. Soit n_0 un entier strictement supérieur à 1 tel que $u_{n_0} = 1$. Calculer u_1, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer u_n en fonction de a et de n.

Partie B

Soit un nombre réel a vérifiant $0 < a < 1$.
Soit une expérience ayant deux résultats possibles : A avec une probabilité de a et B avec une probabilité de $1 - a$.
Un joueur répète cette expérience, les différents résultats sont indépendants.
Le joueur gagne 1 euro chaque fois que le résultat est A et il perd 1 euro chaque fois que le résultat est B.
Il dispose au départ d'une somme de k euros, k appartenant à $\mathbb{N}^*$.
Il décide d'arrêter l'expérience soit lorsqu'il est ruiné, soit lorsqu'il possède la somme de n euros, où n appartient à $\mathbb{N}^*$ tel que $0 < k < n$.
On note $p_{n,k}$ la probabilité pour qu'il gagne n euros et $q_{n,k}$ la probabilité pour qu'il soit ruiné.

3.7. En considérant les possibilités après la première expérience, déterminer une relation entre $p_{n,k+1}$, $p_{n,k}$ et $p_{n,k-1}$ d'une part et entre $q_{n,k+1}$, $q_{n,k}$ et $q_{n,k-1}$ d'autre part.

3.8. En utilisant la partie précédente, déterminer $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$.

3.9. Discuter selon les valeurs de a, de :

$$\lim_{n \to +\infty} p_{n,k}$$

Interpréter ce résultat.

3.10. Les événements « le joueur gagne n euros » et « le joueur est ruiné » forment-ils un système complet d'événements ? Déterminer $p_{n,k}+q_{n,k}$. Interpréter ce résultat.

3.11. On prend dans cette question,

$$a = \frac{1}{2}, n = 5 \text{ et } k = 3.$$

Calculer :

a. la probabilité pour que le joueur gagne en moins de 6 coups.
b. la probabilité pour que le joueur soit ruiné en moins de 6 coups.
c. la probabilité pour que le joueur joue au moins 7 coups.