CONCOURS G2E

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées pour cette épreuve.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.
Le sujet est composé de 3 problèmes indépendants.

PROBLEME 1

Soient n et p deux entiers naturels. On rappelle que :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \text{ si } p \leq n \text{ et, par convention, } \binom{n}{p} = 0 \text{ si } p > n.$$

1.1 Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

a) Montrer que :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

b) On veut montrer par récurrence la propriété suivante, dépendant de l'entier naturel n :

$$\forall p \in [\![0, n]\!],\ \binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n} \binom{k}{p}.$$

Vérifier l'égalité pour les couples (n, p) égaux à $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$.
Soit un entier naturel n tel que :

$$\forall p \in [\![0, n]\!],\ \binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n} \binom{k}{p}.$$

Montrer qu'alors, on a :

$$\forall p \in [\![0, n]\!],\ \binom{n+2}{p+1} = \sum_{k=p}^{k=n+1} \binom{k}{p}.$$

Conclure.

c) En choisissant judicieusement des valeurs particulières pour p dans la relation trouvée en 1.1.b, donner pour tout entier naturel n, non nul, une expression des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{k=n} k \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{k=n} k(k-1) \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{k=n} k(k-1)(k-2).$$

Dans la suite du problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
On tire simultanément deux jetons au hasard.
On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros tirés et Y la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros tirés.

1.2 Soit $j \in [\![2, n]\!]$. Montrer que :

$$P(Y \leq j) = \frac{\binom{j}{2}}{\binom{n}{2}}.$$

En déduire $P(Y = j)$. Vérifier que la formule donnant $P(Y = j)$ est encore valable pour j=1.

1.3 Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer $P(X \geq i)$ et $P(X = i)$. Vérifier que la formule donnant $P(X = i)$ est encore valable pour i=n.

1.4 Déterminer la loi du couple (X,Y) et retrouver les résultats de 1.2 et 1.3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

1.5 a) Comparer les lois des variables aléatoires n+1-X et Y. En déduire que :

$$E(n+1-X) = E(Y) \text{ et } V(n+1-X) = V(Y).$$

b) Exprimer $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et $V(X)$ en fonction de $V(Y)$. Puis, exprimer $E(X)$ et $E(Y)$ en fonction de n.

1.6 Déterminer $E(Y(Y-2))$, puis exprimer $E(Y^2)$, $V(X)$ et $V(Y)$ en fonction de n.

1.7 Calculer $E(X(Y-2))$ et montrer que :

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

1.8 En déduire la covariance de X et Y. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est-il défini ? Déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire de X et Y dans ce cas. Que remarque-t-on ?

PROBLEME 2

Soit t un réel strictement positif.
On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

2.1 a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par g : $x \mapsto \sqrt{x} - x$. Étudier le signe de g.

b) Montrer que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq x_{n+1} \leq x_n$. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

c) Étudier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque t<1.

On considère également les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n = 2^n(x_n - 1) \text{ et } v_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{u_n}{x_n}.$$

2.2 Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ en fonction de x_{n+1}. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.3 Déterminer de même le sens de variation de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.4 Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n - v_n \geq 0$.

2.5 Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

2.6 Déduire alors de la question 2.1 que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite, que l'on notera L.

2.7 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, donner un encadrement de L à l'aide de u_n et v_n. En déduire que pour tout réel t strictement positif, on a:

$$1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1.$$

L est un nombre réel dépendant de la donnée de x_0, c'est-à-dire de t.
Nous pouvons alors considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t)=L$.

Pour tout t>0 et tout $n\in\mathbb{N}$, nous poserons : $x_n(t) = x_n$; $u_n(t) = u_n$; $v_n(t) = v_n$, pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t.

2.8 Déterminer f(1).

2.9 Calculer :

$$\lim_{t\to 1}\frac{f(t)}{t-1}.$$

En déduire que f est dérivable en 1 et donner f'(1).

2.10 a) Montrer que :

$$\forall t_1\in\mathbb{R}_+^*, \ \forall t_2\in\mathbb{R}_+^*, \ \forall n\in\mathbb{N}, \ x_n(t_1\cdot t_2) = x_n(t_1)\cdot x_n(t_2).$$

b) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty}\big(u_n(t_1\cdot t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2)\big).$$

c) Donner une relation entre $f(t_1 \cdot t_2)$, $f(t_1)$ et $f(t_2)$.

2.11 a) Montrer que, pour tout réel t strictement positif et tout réel h tel que t+h soit strictement positif, on a :

$$f(t+h) - f(t) = f\left(1 + \frac{h}{t}\right).$$

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer f'(t) pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$.

c) En justifiant votre réponse, exprimer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles.

2.12 Exprimer pour tout entier naturel n, x_n, en fonction de n et de t. Retrouver alors directement le résultat de 2.11.c.

PROBLEME 3

Soit λ un réel donné et soit I l'intervalle $]-1,+1[$.

3.1 Déterminer les réels a et b dépendant de λ tels que, $\forall x \in I$,

$$\frac{3x+1-\lambda}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}.$$

On considère l'équation différentielle (E_λ) : $(1-x^2)\,y'(x) + (3x+1-\lambda)y(x) = 0$.

3.2 Résoudre cette équation sur I pour tout réel λ.

3.3 On admettra que la fonction : $x \mapsto (1+x)^\alpha(1-x)^\beta$ est un polynôme si et seulement si α et β sont des entiers naturels.

Montrer que les seules valeurs de λ pour lesquelles les solutions de (E_λ) sont des polynômes sont : -2 ; 0 ; 2 et 4. Préciser alors les solutions correspondantes.

Soient $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 et $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

On note R et S les polynômes définis sur $\mathbb{R}$ par $R(X) = 1 - X^2$ et $S(X) = 1 + 3X$.

Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on désigne par P' son polynôme dérivé.

3.4 Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a : $RP' + SP \in \mathbb{R}_3[X]$.

3.5 Montrer que l'application f qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe $f(P) = RP' + SP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

3.6 Calculer f(P) pour $P \in \{1, X, X^2, X^3\}$ et en déduire la matrice A de f dans la base B.

3.7 Soit Q un vecteur propre de f et λ la valeur propre associée à Q. Donner une relation vérifiée par Q et λ. En déduire, en utilisant la question 3.3, les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés.

3.8 En déduire que A est diagonalisable. En rangeant les valeurs propres par ordre croissant, déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$, appelée B', formée de vecteurs propres de f qui sont des polynômes dont le coefficient dominant est égal à 1. Écrire la matrice de passage, de la base canonique B à cette base B', matrice que l'on notera V.

3.9 Écrire une relation entre la matrice A, la matrice V et une matrice diagonale D que l'on précisera.

3.10 Calculer V^2 et en déduire V^{-1}.