



**EXERCICES
ÉPREUVE
MATHS**



INSTRUCTIONS AUX CANDIDATS

Durée de l'épreuve : 2 h

Chaque épreuve contient 16 exercices indépendants. Le candidat doit répondre à 12 exercices sur les 16 qui lui sont présentés, ce qui lui permet d'éliminer les exercices qui porteraient sur une partie du programme non traitée à la date des épreuves écrites. S'il répond à plus de 12 exercices, seuls les 12 premiers seront corrigés.

Chaque exercice comporte 4 affirmations signalées par les lettres a, b, c, d. Pour chacune des affirmations.

le candidat indique si l'affirmation est vraie (V) ou fausse (F), ou il s'abstient ;

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse V ou F à l'une des 4 affirmations est donnée ;

Toute bonne réponse rapporte un point, toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point ;

L'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme des réponses, elles ne rapportent ni ne retirent aucun point ;

Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement (c'est à dire si le candidat a fourni 4 réponses exactes à l'exercice).

Exercice n°1

Bases en Analyse.

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

- a) La dérivée de $x \mapsto x \times e^x$ est $x \mapsto e^x$.
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 1}{x} = +\infty$
- c) Soit f est une fonction définie sur \mathbb{R} . Si $f' = f$, alors f est la fonction nulle.

Soit A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cup B) = 0,7$.

- d) A et B sont incompatibles.

Exercice n°2

Bases en Géométrie.

Pour le a) et b), on se place dans le plan complexe $(0; \vec{u}, \vec{v})$.
Les questions a) et b) sont indépendantes.

- a) Si $z = -6 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ alors $\arg(z) = \frac{2\pi}{3} + [2\pi]$.
- b) Si M est un point d'affixe z de partie imaginaire non nulle et M' un point d'affixe $z' = -z$, alors M et M' sont symétriques par rapport à O.

Pour le c) et d), on se place dans le repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

On pose (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives $4x + 6y - 10z + 3 = 0$ et $-6x - 9y + 15z - 8 = 0$.

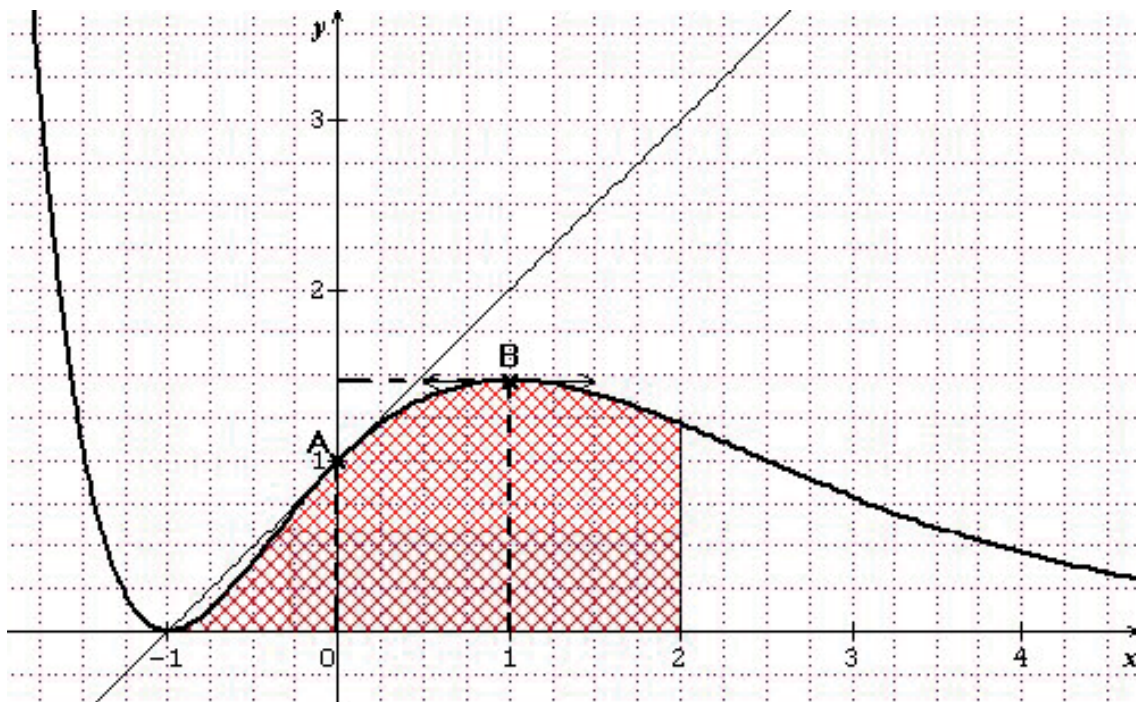
Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t-3 \\ z = 5t-1 \end{cases}$ où t désigne un nombre réel.

- c) (P_1) et (P_2) sont sécants.
- d) Le point A(2 ; 3 ; -5) appartient à la droite (d).

Exercice n°3

Lecture graphique.

On considère la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur \mathbb{R} ainsi que la tangente à cette courbe au point A de coordonnées (0 ;1).



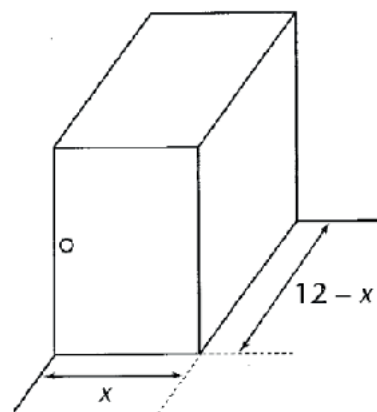
- a) $f'(0) = 1$.
- b) $f'(1) = 1.5$.
- c) L'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $[-1.5 ; 4]$.
- d) $2 \leq \int_{-1}^2 f(x) dx \leq 4$.

Exercice n° 4

Volume d'un parallélépipède rectangle.

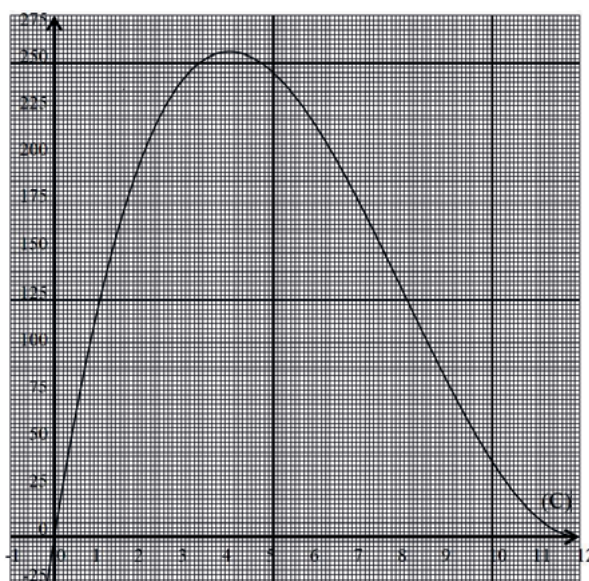
On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail, un placard ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour des raisons pratiques, si sa largeur est x , sa profondeur est $12 - x$ et la hauteur est égale à la profondeur.

On suppose $x \in [0; 12]$ (les dimensions sont exprimées en dm).



- a) Le volume $V(x)$ en dm^3 de ce placard est égal à $V(x) = (-12x + x^2) \times (x - 12)$.

On pose f la fonction définie sur $[0; 12]$ par $f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$ de courbe représentative (C) ci-dessous.



- b) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 12]$, $f'(x) \geq 0$.
- c) $V(x) = 2 \times f(x)$.
- d) Dans le cas particulier où le parallélépipède rectangle serait un cube, son volume serait compris entre 200 et 225 dm^3 .

Exercice n°5

Utilisation d'une suite dans un algorithme.

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - n) - 1$.

On donne l'algorithme suivant :

Entrée : n est un entier naturel.
Initialisation : u prend la valeur 1 ;
 i prend la valeur 0.
Traitement : Tant que $i < n$
 | u prend la valeur $\frac{1}{2}(u_n - i) - 1$
 | i prend la valeur $i + 1$
 Fin Tant que.
Sortie : Afficher u .

a) Pour $n=3$, l'algorithme nous donne le tableau suivant :

n	u	i
3	1	0
3	$-\frac{1}{2}$	1
3	$-\frac{7}{4}$	2
3	$-\frac{23}{4}$	3

b) Pour $n=3$, l'algorithme calcul u_n .

On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n + n$.

c) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n} + n$

Exercice n°6

Utilisation d'un algorithme avec les complexes.

On se place dans le plan complexe $(0; \vec{u}, \vec{v})$.

On donne l'algorithme suivant :

Entrée : θ est un nombre réel.
 a est un nombre réel.
 b est un nombre réel.
 a' est un nombre réel.
 b' est un nombre réel.

Traitement : a' prend la valeur $a \times \cos(\theta)$.
 a' prend la valeur $a' - b \times \sin(\theta)$.
 b' prend la valeur $a \times \sin(\theta)$.
 b' prend la valeur $b' + b \times \cos(\theta)$.

Sortie : Afficher a' .
 Afficher b' .

Pour le a) et b) on suppose $\theta = \frac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$.

a) $a' = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

b) $b' = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

Dans toute la suite on posera M le point d'affixe $z = a + ib$ et M' le point d'affixe $z' = a' + ib'$ avec a' et b' les deux nombres obtenus dans l'algorithme précédent.

c) Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$ alors $|z'| = \sqrt{2}$.

d) Dans le cas général où $\theta \in \mathbb{R}$, $z' = e^{i\theta}z$.

Exercice n°7

Bases de logique.

Pour le a) et b) on suppose z un nombre complexe et Γ un sous ensemble de \mathbb{C} .

a) $z \neq 0$ si et seulement si $\text{Re}(z) \neq 0$ et $\text{Im}(z) \neq 0$.

b) La contraposée de « si $z \in \Gamma$ alors $\text{Re}(z) = 0$ » est « si $\text{Re}(z) = 0$ alors $z \in \Gamma$ ».

Pour le c) et d) on suppose f une fonction définie sur $I = [-3; 5]$.

c) Si $f(-3) < 0$ et $f(5) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur I .

d) Si f admet une primitive sur $I = [-3; 5]$ alors f est continue sur $I = [-3; 5]$.

Exercice n°8

Calculs de limites.

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = -\infty.$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$
- c) Si, pour tout réel x non nul, $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x-1}{x^2+1}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$
- d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} = 1.$

Exercice n°9

Calculs d'intégrales.

- a) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4 + 2 \times \sqrt{2}.$
- b) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(2).$
- c) La fonction $x \mapsto (x^2 - 2x + 2) \times e^x - 2$ est une primitive définie sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto x^2 \times e^x.$
- d) $\int_0^1 x^2 \times e^x dx = 3e - 2.$

Exercice n°10

Notions de bases sur les nombres complexes.

On se place dans le plan complexe $(0; \vec{u}, \vec{v})$. On considère A le point d'affixe $z_A = -2i$, B le point d'affixe $z_B = -2$ et E le point d'affixe $z_E = 2 + 2i\sqrt{3}$.

- a) L'écriture trigonométrique de $2 + 2i\sqrt{3}$ est $4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right).$
- b) E est situé sur le cercle de centre O et de rayon $R = 2.$
- c) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z + 2i| = |2 + z|$ est la médiatrice du segment [AB].
- d) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $2z\bar{z} = 1$ est un cercle de rayon 2.

Exercice n°11

Utilisation des nombres complexes en géométrie.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le

point M' d'affixe $z' = 1 + \frac{i}{z}$.

a) L'image par f du point A d'affixe $z_A = 1 + i$ est le point A' d'affixe $z_{A'} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

Dans toute la suite, on pose $z = x + iy$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et $z' = x' + iy'$ avec $x', y' \in \mathbb{R}$.

b) $\operatorname{Re}(z') = x' = \frac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + y^2}$.

c) $\operatorname{Im}(z') = y' = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

d) L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tel que z' soit imaginaire pur est le cercle (C) de centre

$A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{1}{2}$ privé du point O .

Exercice n°12

Etude d'une fonction logarithme.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

On note D l'ensemble de définition de f .

a) $1 - x^2 \geq 0$ si et seulement si $-1 \leq x \leq 1$.

b) $D = [-1; 1]$.

c) La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f' définie sur D par $f'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$.

d) L'équation $f(x) = 1$ a pour solutions $x = \sqrt{e-1}$ et $x = -\sqrt{e-1}$.

Exercice n°13

Etude d'une fonction exponentielle.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- c) La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f' définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(e^{-x}(x^2 + 1))}$.
- d) f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.

Exercice n°14

Bases en probabilités.

On considère, dans a), deux évènements E et F d'une même expérience aléatoire.

a) $P_{\bar{F}}(E) = 1 - P_F(E)$.

Pour le b), c) et d), nous utiliserons les hypothèses suivantes :

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne.

Si la boule est blanche, il lance un dé tétraédrique dont les faces numérotées de 1 à 4 ont la même probabilité d'apparition.

Si la boule est noire, il lance un jeton dont les faces numérotées de 1 à 2 ont la même probabilité d'apparition.

On considère les événements suivants :

G : « Le joueur obtient le numéro 1 », B : « Le joueur tire une boule blanche ».

b) $P(B \cap G) = \frac{5}{32}$.

c) $P(G) = \frac{13}{32}$.

d) $P_c(B) = \frac{5}{11}$.

Exercice n°15

Différentes lois de probabilités.

- a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 5]$.
 $P\left(1 \leq x \leq \frac{5}{2}\right) = 0,4$.
- b) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $P(Y > c) = e^{-\lambda c}$.
- c) Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{10}$.
 $P(T \leq 10) = 1 - \frac{1}{e}$.
- d) Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ et vérifiant
 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0,75$.
La loi de Z n'est pas la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Exercice n°16

Repérage dans l'espace.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère le plan P d'équation cartésienne.

$x + 2y + 3z - 2 = 0$ et la droite D dont une représentation paramétrique est, pour tout réel t ,

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

- a) Le point $A(-1 ; 3 ; -2)$ appartient à D .
- b) Le plan P et la droite D sont sécants au point B de coordonnées $(-3 ; 4 ; -1)$.
- c) La droite D' , de représentation paramétrique $\begin{cases} x = k \\ y = -2k + 1 \\ z = k \end{cases}$ pour tout réel k , est sécante au plan P .
- d) Les droites D et D' sont coplanaires.