CORRECTION PUISSANCE 11 2014
MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

A. FAUX

La dérivée est $x \to \frac{1*e^x - x*e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$

B. FAUX

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \mathbf{0}$, d'après les croissances comparées.

C. VRAI

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

La théorème des gendarmes permet de conclure que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

D. FAUX

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0^+$ donc $\lim_{n\to+\infty} ln\ \frac{1}{n} = -\infty$

EXERCICE 2

A. VRAI

En soustrayant l'équation de (Q) à celle de (P), on obtient bien l'équation suivante : $\boldsymbol{x + 2z = 2}$, qui est l'équation d'un plan.

Mais l'équation de l'intersection de (P) et de (Q), qui est une droite, est un système de deux équations, par exemple :

$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + 2z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

B. FAUX

$\vec{u}(1; -1;\ 0)$ est un vecteur directeur de (D).

$\vec{n}(1; 1;\ 2)$ est un vecteur normal à (P).

Or, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires : (D) n'est donc pas perpendiculaire au plan (P).

C. VRAI

$$A=\int_1^4 x-(x-2)^2dx \;=\int_1^4 -x^2+5x-4\,dx \;=\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right]_1^4=\left(-\frac{64}{3}+\frac{80}{2}-16\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right)=-\frac{63}{3}+24+\frac{3}{2}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

D. FAUX

La seule asymptote que la courbe pourrait admettre serait quand $x\to+\infty$.

Or, $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x-3}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=+\infty$

Donc $\lim_{x\to+\infty} ln\,\frac{2x^2-x-3}{x-1}=+\infty$. La courbe n'admet pas d'asymptote horizontale.

Exercice 3

A. FAUX

Par lecture de la courbe de f', on a $f'(0)=2$. La dérivée n'est donc pas nulle en 0 : (C), courbe de f, n'admet pas de tangente horizontale en x = 0.

B. VRAI

f' est négative sur $[-3;-2]$ puis positive sur $[-2;0]$.

f est donc décroissante sur $[-3;-2]$ puis croissante sur $[-2;0]$: f admet donc un minimum relatif ou local en x = -2.

C. FAUX

L'étude du signe de la dérivée, par lecture de sa courbe, nous dit que f est donc croissante sur $[0;3]$ puis décroissante sur $[3;5]$.

D. VRAI

$f'(-3)=f'(2)=1$.

Les tangentes ont même coefficient directeur et sont donc parallèles.

EXERCICE 4

A. VRAI

$u_1 = 2 + 2 * (1 - 1) + 1 = 3$

$u_2 = 3 + 2(2 - 1) + 1 = 6$

$u_3 = 6 + 2 * (3 - 1) + 1 = \mathbf{11}$

B. VRAI

$u_{n+1} = u_n + 2(n + 1 - 1) + 1 = \boldsymbol{u_n + 2n + 1}$

C. VRAI

$u_{n+1} - u_n = \boldsymbol{2n + 1} > 0$

La suite est strictement croissante.

D. VRAI

Par récurrence :

- $u_0 = 0^2 + 2 = 2$
- Si $u_n = n^2 + 2$, alors

$\boldsymbol{u_{n+1}} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 + 1 = \boldsymbol{(n + 1)^2 + 1}$.

La propriété se transmet.

EXERCICE 5

A. VRAI

$$z_1{}^2 = \left((\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})\right)^2$$
$$= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + i^2(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 2i(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$
$$= 6 + 2 + 2\sqrt{12} - (6 + 2 - 2\sqrt{12}) + 2i(6 - 2) = 4\sqrt{12} + 8i$$
$$= \mathbf{8\sqrt{3} + 8}\boldsymbol{i}$$

B. FAUX

$|z_2| = \frac{|1+i|}{|\sqrt{3}+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$

C. FAUX

$\arg\,(z_1{}^2) = \arg(16(\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}})) = \arg(16\,\boldsymbol{e}^{\frac{i\pi}{6}}) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}[\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$

D. FAUX

$\text{ar}\ (z_2) = \arg(1+i) - \arg\,(\sqrt{3}+i) = \arg(\sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})) - \arg\,(2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}))$
$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}[2\pi]$

Donc : $\boldsymbol{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}^{\frac{i\pi}{12}}$

EXERCICE 6

A. FAUX

La négation d'une affirmation : « A <u>et</u> B » est : « contraire de A <u>ou</u> contraire de B ».

La négation de $''x \geq 0\ et\ y \geq 0''$ est $''\boldsymbol{x} < 0\ OU\ y < 0''$

B. FAUX

$\text{Si x} = \text{y, alors } \arg\,(z) = \frac{\pi}{4}[\boldsymbol{\pi}]$ et pas $[\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$.

En effet, si x et y sont négatifs, alors $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}\,[\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$

C. VRAI

La réciproque est vraie : $\mathbf{Si}\ \mathbf{arg}(\boldsymbol{z}) = \frac{\pi}{4}[\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}], \mathbf{alors}\ \ \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

D. VRAI

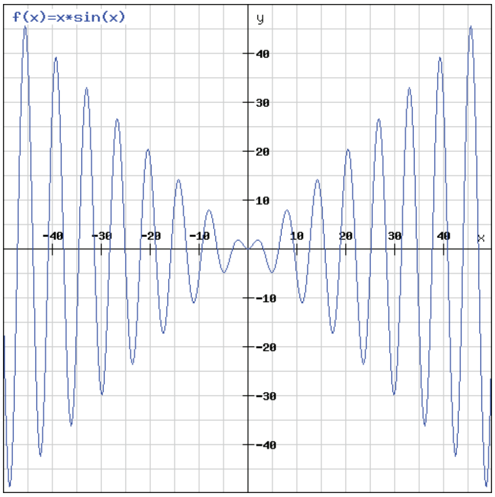
$z = \frac{1}{z} \rightarrow z^2 = 1 \rightarrow (x+iy)^2 = 1 \rightarrow x^2 - y^2 - 1 + 2ixy = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 \\ \mathbf{2}\boldsymbol{xy} = \mathbf{0} \end{cases}$

La 2ème équation implique que x ou y est nul.

EXERCICE 7

A. VRAI

La fonction n'admet pas de limite aux infinis : elle s'annule périodiquement et admet des maximums locaux positifs de plus en grands et des minimums locaux négatifs de plus en plus bas.



B. FAUX

- $x \to \cos(x) + 2$ n'admet pas de limite à l'infini mais est bornée par 1 et 3.
- $x - 1 \leq \cos(x) + x \leq x + 1$

Le théorème des gendarmes nous permet d'écrire :
$\lim_{x\to+\infty} \cos(x) + x = +\infty$

Donc : $\mathbf{\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)+2}{\cos(x)+x} = 0}$.

C. FAUX

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 3x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{0+3x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{(1+\frac{1}{x})} = \mathbf{3}$$

D. FAUX

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} * \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

Or :

- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, d'après votre cours.
- $\lim_{x\to >0}\frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to <0}\frac{1}{x} = -\infty$

Donc : $\lim_{x\to >0}\frac{\ln(1+x)}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x\to <0}\frac{\ln(1+x)}{x^2} = -\infty$

Quand la limite en a n'est pas la même par valeurs positives et négatives, la limite en a n'existe pas.

Exercice 8

A. FAUX

$$\int_2^4 \frac{3}{x^2}dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_2^4 = -\frac{3}{4}+\frac{3}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

B. VRAI

$$F'(x) = \frac{1}{2} * (2x+2) * \frac{1}{x^2+2x} = \frac{x+1}{x^2+2x} = \boldsymbol{f(x)}$$

C. VRAI

$$\int_1^e \frac{1+t}{t^2}dx = \int_1^e \frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}\,dx = \left[-\frac{1}{t}+\ln t\right]_1^e = -\frac{1}{e}+1+\ln e = \boldsymbol{2-\frac{1}{e}}$$

D. VRAI

$$\int_0^1 \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}}dx = \left[\frac{x}{e^x}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{e}}$$

EXERCICE 9

A. VRAI

$z_{B'} = (1+i)*2-1 = 3+2i = \boldsymbol{Z_C}$

B. VRAI

$z_{A'} = (1+i)*i-1 = i = \boldsymbol{Z_A}$

C. FAUX

Considérons les points M de l'axe des réels : z=x. Alors $z' = (1+i)x+1.$

Donc : $z' - z_B = (1+i)x+1-2 = \boldsymbol{(x-1)+ix}.$

Or, $z_{\overrightarrow{BC}} = 3+2i-2 = \boldsymbol{1+2i}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM'}$ ne sont pas colinéaires (sauf si x =2, c'est à dire M=B et M'=C).

Si $M \neq B$, le point M' n'est pas sur (BC) : la droite (BC) n'est pas image de l'axe des réels.

D. FAUX

- $z_{MD} = 1 - z = (1-x) - iy$
- $z_{MM'} = (1+i)z + 1 - z = iz + 1 = (1-y) + ix$
- $|z_{MD}|^2 = (1-x)^2 + y^2 = 1 + y^2 + x^2 - 2x$
- $|z_{MM'}|^2 = (1-y)^2 + x^2 = 1 + y^2 + x^2 - 2y$

Donc, nous n'avons pas, pour tout point M différent de A et D, $|\boldsymbol{z_{MM'}}| = |\boldsymbol{z_{MD}}|$, ce qu'il faudrait pour que DMM' soit isocèle en M.

EXERCICE 10

A. FAUX

La partie grisée est de largeur $2\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{4}$

Soit : $\mu = 5 \; et \; \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{2}$

B. FAUX

L'aire du domaine A2, soit l'intervalle $[\boldsymbol{\mu} - \mathbf{2}\,\boldsymbol{\sigma};\ \boldsymbol{\mu} - \mathbf{2}\,\boldsymbol{\sigma}]$, est égale à 0,95 d'après votre cours.

C. VRAI

L'aire du domaine A3 est égale à $\frac{A2-A1}{2} = \frac{0,95-0,68}{2} = \frac{0,27}{2} = \mathbf{0,135}$

D. VRAI

$$P(T \leq 9) = 1 - P(T > 9) = 1 - \frac{1 - A2}{2} \sim 1 - \frac{0,05}{2} \sim \mathbf{0,975}$$

EXERCICE 11

A. FAUX

$$z' = \left(\frac{\bar{z}}{|z|}\right)^2 = \frac{(x - iy)^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{x^2 + y^2}$$

Soit $\begin{cases} \boldsymbol{x'} = \frac{\boldsymbol{x^2 - y^2}}{\boldsymbol{x^2 + y^2}} \\ \boldsymbol{y'} = \frac{\boldsymbol{-2xy}}{\boldsymbol{x^2 + y^2}} \end{cases}$

B. FAUX

$\mathrm{M'appartient\ à\ l'axe\ des\ ordonnées} \leftrightarrow \mathrm{x'} = 0 \leftrightarrow \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 = 0$

$\leftrightarrow x = y \; ou \; x = -y$ avec x ou y $\neq 0$.

M' appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si M appartient à l'une des deux droites d'équation x$= \boldsymbol{y \; ou \; x = -y}$ privées du point O.

C. VRAI

$$|z'| = \left(\left|\frac{\bar{z}}{|z|}\right|\right)^2 = \left(\frac{|\bar{z}|}{|z|}\right)^2 = 1$$

M' est bien un point du cercle trigonométrique.

D. FAUX

$$M' \text{ a pour affixe } -1 \leftrightarrow \begin{cases} -1 = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ 0 = \dfrac{-2xy}{x^2+y^2} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -x^2-y^2 = x^2-y^2 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 0 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

M' a pour affixe -1 si et seulement si $x = 0$. Il n'a pas de condition sur y, autre que d'être non nul.
Ainsi, tous les imaginaires purs ont pour image l'affixe -1.

EXERCICE 12

A. FAUX

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

- $x^2+x+1 > 0$
- $2x+1$ change de signe en x=-0,5.

Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty; -0,5]$ et croissante sur $]-0,5; +\infty]$

B. FAUX
f est définie pour tous les réels et n'admet pas de limite infinie en un nombre fini: (C) ne peut admettre d'asymptote verticale.

C. FAUX

$$f(x) \geq f(-0{,}5) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$$

D. VRAI
Les parallèles à Δ ont un coefficient directeur égal à 1.

$f'(x) = 1 \leftrightarrow 2x + 1 = x^2 + x + 1 \leftrightarrow x^2 - x = 0 \leftrightarrow x(x-1) = 0$
$\leftrightarrow \boldsymbol{x = 0 \ ou \ x = 1}$

Les tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et 1 sont parallèles à Δ.

EXERCICE 13

A. VRAI

$f'(x) = \frac{1}{2} * 2 * e^{2x} + e^x - 2 = e^{2x} + e^x - 2 = (e^x - 1) * (e^x + 2)$

B. FAUX

$f'(x) = (e^x - 1) * (e^x + 2)$

Donc, f' est du même signe que $e^x - 1$, soit négative sur $]-\infty; 0]$ et positive sur $]-\infty; 0]$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Pour tout réel x, $f(x) \geq f(0) = \frac{3}{2}$

Mais, on ne peut dire que pour tout réel x, $f(x) > f(\frac{3}{2})$ puisque $f(0) = \frac{3}{2}$

C. FAUX

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}(1 + \frac{e^x}{e^{2x}} - \frac{2x}{e^{2x}}) = +\infty * 1 = +\infty$

Cf n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$

D. VRAI

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = = 0 + 0 - (-\infty) = +\infty$

EXERCICE 14

A. VRAI

$p2 = 0{,}2 * 0{,}7 + 0{,}8 * 0{,}5 = \mathbf{0,54}$

B. FAUX

$$P = 0{,}8 * \frac{0{,}5}{0{,}54} = \frac{0{,}4}{0{,}54} = \mathbf{\frac{0,2}{0,27} \neq 0,6}$$

C. VRAI

$$p_{n+1} = 0{,}7p_n + (1 - p_n) * 0{,}5 = \mathbf{0,2p_n + \frac{1}{2}}$$

D. FAUX

Erreur d'écriture de l'algorithme : il ne suffit pas d'écrire « pour i allant de 2 à n ». Il manque : tant que $i \leq n$ au début et i devient i+1 à la fin de la boucle.

EXERCICE 15

A. FAUX

$$\frac{5}{t} = 0{,}4 \leftrightarrow t = \frac{5}{0{,}04} = \mathbf{12,5}$$

B. VRAI

$$np = 12 \leftrightarrow n = \frac{12}{0{,}3} = \mathbf{40}$$

C. VRAI

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}002} = \mathbf{5000}$$

D. VRAI

Si $p_B(A) = p_A(B)$ alors $\frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{p(A\cap B)}{P(A)}$ donc $\boldsymbol{p(A) = p(B)}$.

EXERCICE 16

A. VRAI

Le plan (GDF) coupe le segment [EB] perpendiculairement en son milieu : c'est le plan médiateur.

B. VRAI

B(1 ;0 ;0), E(0 ;0 ;1) et G(1 ;1 ;1) vérifient l'équation $x - y + z = 1$

C. VRAI

- $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$. Donc les coordonnées de I vérifient l'équation de (BEG) : $x - y + z = 1$

- D(0 ;1 ;0) et F(1 ;0 ;1)

  $\overrightarrow{DI}\left(\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ *et* $\overrightarrow{DF}(1;-1;1)$ sont colinéaires. Donc I est sur la droite (DF).

D. FAUX

La distance de D à (BEG) est égale à DI.

$$DI = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{3}}$$