CORRECTION PUISSANCE 11 2013
MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

A. FAUX
Si $f(x) = x * e^x$ alors $f'^{(x)} = 1 * e^x + x * e^x = e^x + x * e^x$.

B. FAUX
$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$, d'après les croissances comparées.

C. FAUX
Contre-exemple : $f: x \to f(x) = e^x$.

D. VRAI
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Donc : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}7 - 0{,}2 - 0{,}5 = 0$.
$P(A \cap B) = 0$. Par définition, A et B sont donc incompatibles.

EXERCICE 2

A. FAUX
Si $z = -6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 6e^{i\pi} * e^{i2\pi/3}$ car $-1 = e^{i\pi}$

Donc $z = 6e^{i(3\pi+2\pi)/3} = 6e^{i5\pi/3}$
$\boldsymbol{arg z = 5\pi/3[2\pi]}$

B. FAUX
$z' = -\bar{z} = -(x - iy) = -x + iy$ donc $X_{M'} = -X_M$ et $Y_{M'} = +Y_M$
La symétrie est axiale d'axe (Oy).

C. FAUX
P1 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(4; 6;\ -10)$.
P2 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(-6; -9;\ +15)$.
Donc $\overrightarrow{n_2} = -3/2\overrightarrow{n_1}$.
Les vecteurs normaux étant colinéaires, les plans sont parallèles.

D. FAUX

En remplaçant les coordonnées de A dans l'équation paramétrique de la droite, on obtient un système sans solution avec t=0,5 ET t=-6, ce qui est impossible.
A n'appartient donc pas à la droite (d).

EXERCICE 3

A. VRAI

La pente de la tangent au point d'abscisse 0 est égale à 1.
On a bien $\boldsymbol{f'(0) = 1}$

B. FAUX

La tangente est horizontale au point d'abscisse 1.
Donc $\boldsymbol{f'(1) = 0}$.

C. FAUX

La droite d'équation $f(x) = x$ coupe deux fois la courbe (C) aux points d'abscisse -1 et 0, sur l'intervalle $[-1{,}5; 4]$.

D. VRAI

$\int_{-1}^{2} f(x)dx$ est égale à la surface grisée. En comptant les carreaux de surface 1*1= 1, on peut conclure que l'intégrale est bien comprise entre 2 et 4.

EXERCICE 4

A. VRAI

$$V(x) = x * (12 - x) * (12 - x) = x * (x - 12) * (x - 12)$$
$$= (x^2 - 12x)(x - 12).$$

B. FAUX

f est croissante sur $[0;4]$ et décroissante sur $[4;12]$.
Sa dérivée est donc positive sur $[0;4]$ et négative sur $[4;12]$.

C. FAUX

$V(x) = (x^2 - 12x)(x - 12) = x^3 - 12x^2 + 144x - 12x^2 = x^3 - 24x^2 + 144x$
$V(x) = f(x)$.

D. VRAI

$12 - x = x$ implique $x = 6.$ $f(6) \in [200;225]$, par lecture de la courbe.

EXERCICE 5

A. FAUX

$$u_1 = \frac{1}{2} * (1 - 0) - 1 = -\frac{1}{2}$$
$$u_2 = \frac{1}{2} * \left(-\frac{1}{2} - 1\right) - 1 = \frac{1}{2} * \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{7}{4}$$
$$u_3 = \frac{1}{2} * \left(-\frac{7}{4} - 2\right) - 1 = \frac{1}{2} * \left(-\frac{15}{4}\right) - 1 = -\mathbf{\frac{23}{8}}$$

B. VRAI

Pour n=3, l'algorithme calcule successivement u_1, u_2 puis
$\frac{1}{2} * (u_2 - 2) - 1 = \boldsymbol{u_3}$.

C. VRAI

$v_n = u_n + n$

Donc : $v_{n+1} = u_{n+1} + n + 1 = \frac{1}{2} * (u_n - n) - 1 + n + 1$
$= \frac{1}{2} * (v_n - 2n) + n = \frac{1}{2} v_n$.

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$. $(\boldsymbol{v_n})$ est bien géométrique de raison ½.

D. FAUX

Pour tout n, $v_n = (\frac{1}{2})^n$

Donc $\frac{1}{2^n} = u_n + n$

$\boldsymbol{u_n = n - \frac{1}{2^n}}$

EXERCICE 6

A. FAUX

$a' = a\ cos\theta - b \sin\theta$

$a' = 1\cos\pi/3 - 1\sin\pi/3$

$\boldsymbol{a' = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

B. VRAI

$b' = a\ sin\theta + b\cos\theta$

$b' = \sin\pi/3 + \cos\pi/3$

$\boldsymbol{b' = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$

C. VRAI

$z' = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$|z'|^2 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2}$

D. VRAI

$z' = a\ cos\theta - b\sin\theta + iz' = a\ cos\theta - b\sin\theta + i(a\ sin\theta + b\cos\theta)$

$z' = a\ (cos\theta + i\sin\theta) + i^2 bsin\,\theta + ib\ cos\theta$

$z' = a\ e^{i\theta} + ib(\cos\theta + i\,sin\ \theta)$

$z' = (a+ib)e^{i\theta}$
$\boldsymbol{z' = z\, e^{i\theta}}$

EXERCICE 7

A. FAUX
$z \neq 0$ si et seulement si $Re(z) \neq 0$ OU $Im(z) \neq 0$.
Pour qu'un complexe soit non nul, il faut et il suffit que soit la partie réelle, soit la partie imaginaire soient non nulles.

B. FAUX
La contraposée est de $A \Rightarrow B$ est : $contraire\ de\ B \Rightarrow contraire\ de\ A$
Qu'on peut écrire : $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
Remarque : Si $A \Rightarrow B$ alors la contraposée est toujours VRAIE. $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

Ici, la contraposée est : $\boldsymbol{si\ Re(z) \neq 0\ alors\ z \notin \Gamma}$.

Ce que propose l'énoncé est : Si $A \Rightarrow B\ alors\ B \Rightarrow A$.
Soit l'équivalence, qui n'est bien sûr pas toujours VRAIE.

C. FAUX
f est définie sur $[-3;5]$ mais on ne sait pas si la fonction est continue : on ne peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
Il se pourrait qu'il y ait un « saut de courbe », c'est à dire que la fonction soit discontinue, et que la courbe ne coupe jamais l'axe des abscisses.

D. FAUX
Le théorème de votre cours vous dit l'inverse : toute fonction continue admet une primitive.
Mais il ne vous dit pas que si une fonction admet une primitive alors elle est continue.

EXERCICE 8

A. FAUX

$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

FAUX

$\lim_{x \to -\infty} \ln(1/x^2) = \lim_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$.

B. VRAI

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} * \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x^2} = \mathbf{0}$$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \to +\infty} \mathbf{f(x) = 0}$

C. FAUX

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x - 1}{x - \pi/2} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x - \sin \pi/2}{x - \pi/2}$$

Vous devez reconnaitre la limite du taux d'accroissement de la fonction sinus en $\frac{\pi}{2}$, qui est égale à la dérivée en $\frac{\pi}{2}$ soit $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x - 1}{x - \pi/2} = 0$

EXERCICE 9

A. FAUX

$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\int_2^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2\left[\sqrt{x}\right]_2^4 = 2\left(\sqrt{4} - \sqrt{2}\right) = \mathbf{4 - 2\sqrt{2}}$$

B. VRAI

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \mathbf{\ln 2}$$

C. VRAI

La dérivée de $x \to (x^2 - 2x + 2) * e^x - 2$ est :

$x \to (2x - 2) * e^x + (x^2 - 2x + 2) * e^x = \boldsymbol{x^2 e^x}$

D. FAUX

D'après C :

$\int_0^1 \boldsymbol{x^2 e^x} \, dx = [(x^2 - 2x + 2) * e^x - 2]_0^1 = \boldsymbol{e - 2 - (2 * e^0 - 2)}$
$= \boldsymbol{e - 2.}$

EXERCICE 10

A. VRAI

$|2 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{4 + 4 * 3} = \sqrt{16} = 4.$

$$2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{4\ e^{i\pi/3}}$$

B. FAUX

E est situé sur le cercle de centre O et de rayon 4.

C. VRAI

$|z + 2i| = |z + 2| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$

L'ensemble des points à égal distance de A et B est bien la médiatrice de $[AB]$

D. FAUX

$$\boldsymbol{2z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow 2}|z|^2\boldsymbol{e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1 \Leftrightarrow 2}|z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'ensemble des points est le cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 11

A. VRAI

$$z_{A'} = 1 + \frac{i}{1+i} = 1 + \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1 + \frac{i+1}{2} = \frac{\mathbf{3+i}}{\mathbf{2}}.$$

B. VRAI

$$z' = 1 + \frac{i}{x+iy} = 1 + \frac{(x-iy)*i}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+y+ix}{x^2+y^2}$$

$$\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{z}') = \frac{\boldsymbol{x^2+y^2+y}}{\boldsymbol{x^2+y^2}}$$

C. FAUX

$$\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{z}') = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2+y^2}}$$

D. VRAI

$$z'\,imaginaire\ pur \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+y = 0 \quad et\ \ x^2+y^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0\ \ et\ \ x^2+y^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = (\frac{1}{2})^2\ \ et\ \ x^2+y^2 \neq 0$$

L'ensemble des points est le cercle de centre $\left(\mathbf{0}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$ et de rayon $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, privé du point O.

Exercice 12

A. VRAI

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{-1 \leq x \leq 1}.$$

B. FAUX

Ln est définie sur $]0;+\infty[$

Donc f(x) existe si et seulement si $1-x^2>0$.

$\boldsymbol{D=]-1;1[}$ (bornes exclues).

C. FAUX

$$f'(x)=-\frac{2x}{1-x^2}=\boldsymbol{\frac{2x}{x^2-1}}$$

D. FAUX

$f(x)=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{ln(1-x^2)}=1$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{1-x^2=e}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2=1-e}<0$ IMPOSSIBLE

Exercice 13

A. FAUX

$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{x}^2+1}=\frac{0}{+\infty}=\boldsymbol{0}$.

B. VRAI

$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{f(x)}=+\infty$, d'après les croissances comparées.

C. VRAI

$$f'(x)=\frac{2\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{x}^2+1)-2\mathrm{x}*\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{x}^2+1)^2}=\frac{2(\mathrm{x}^2+1-\mathrm{x})*\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{x}^2+1)^2}=\frac{2(\mathrm{x}^2+1-\mathrm{x})}{(\mathrm{x}^2+1)^2*(\mathrm{e}^{-x})}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2(\mathrm{x}^2+1-\mathrm{x})}{((\mathrm{x}^2+1)\mathrm{e}^{-x})^2}}$$

D. FAUX

$f'(x)$ est du même signe que $\mathrm{x}^2+1-\mathrm{x}$.

$\Delta=(-1)^2-4=-3$: le polynôme n'a pas de racine.

Ainsi, quel que soit x : $\mathrm{x}^2+1-\mathrm{x}>0$ donc $f'(x)>0$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

A. FAUX

On peut écrire : $P_F(E) + P_F(\bar{E}) = 1$

Mais pas $P_F(E) + P_{\bar{F}}(E) = 1$

B. VRAI

$$P(B \cap G) = P(B) * \; P_B(G) = \frac{5}{8} * \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{5}{32}}$$

C. FAUX

$$P(G) = P(B \cap G) \; + \; P(\bar{B} \cap G) = \frac{5}{32} + \frac{3}{8} * \frac{1}{2} = \frac{5}{32} + \frac{6}{32} = \mathbf{\frac{11}{32}}$$

D. VRAI

$$P_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{5}{32}}{\frac{11}{32}} = \mathbf{\frac{5}{11}}$$

Exercice 15

A. FAUX

$$P\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{5-0} * \int_0^{\frac{5}{2}} dt = \frac{\frac{5}{2} - 1}{5} = \frac{3}{10} = \mathbf{0{,}3}$$

B. VRAI

Définition du cours

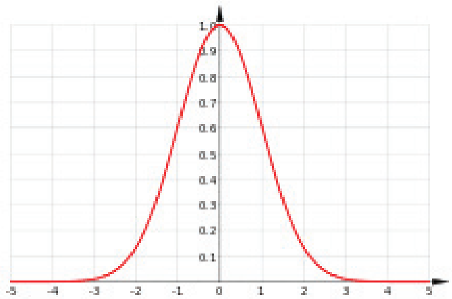
C. VRAI

$$P(T \leq 10) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{1}{10} * 10} = \mathbf{1 - \frac{1}{e}}$$

D. VRAI

Si la loi de Z était la loi normale centrée réduite, on aurait forcément :

$$\boldsymbol{P(0 \leq Z \leq 2) < P(Z \geq 0) = 0,5}$$



EXERCICE 16

A. VRAI

Contrôlons si les coordonnées de A vérifient l'équation paramétrique de D :

$1 + 2t = -1 \Leftrightarrow 2t = -2 \Leftrightarrow \boldsymbol{t = -1}$ et $2 - (-1) = 3$ et $-3 - (-1) = -2$.

$\boldsymbol{A}$ appartient bien à la droite D.

B. VRAI

L'équation cartésienne de P est $x + 2y + 3z - 2 = 0$

En incorporant les coordonnées paramétriques :

$$1 + 2t + 2(2 - t) + 3(-3 - t) - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 1 + 2t + 4 - 2t - 9 - 3t - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow -3t = 6$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = -2}$$

En remplaçant t par -2 dans l'équation paramétrique de D, on obtient les coordonnées de B (-3 ; 4 ; -1).

C. FAUX

D' a pour vecteur directeur $\vec{u}'\ (1;\ -2; 1)$.
P a pour vecteur normal $\vec{n}\ (1; 2\ ; 3)$.

$\vec{n}.\vec{u} = 1 * 1 - 2 * 2 + 3 * 1 = 0$

Les deux vecteurs sont orthogonaux : D' est soit contenue dans le plan P, soit parallèle au plan P. D' et P ne sont donc pas sécants.

On pouvait aussi incorporer les coordonnées paramétriques de D' dans l'équation de P et constater que tous les points de D' sont aussi dans P.
K + 2(-2k +1) + 3k -2 = k- 4k +3 k + 2 -2 = 0
D' est donc incluse dans P.

D. FAUX

D et D' sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.

- $\vec{u}(2; -1; -1)$ *et* $\vec{u}'(1;\ -2; 1)$ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.

- Elles sont sécantes si et seulement si $B \in D'$ (puisque D' est donc incluse dans P et que B est l'intersection entre D et P).
Or, B (-3 ; 4 ; -1) ne vérifient pas l'équation de D'.
La première équation donne 3 = k mais la $2^{ème}$ est alors fausse:
$-2 * -3 + 1 \neq 4$