CPE Lyon – EI Purpan – EPMI – ESA – ESCOM – ESEO – ESIEE Amiens – ESIEE Paris – HEI
ISA – ISARA-Lyon –ISEN Brest –ISEN Lille – ISEN Toulon – ISEP – LASALLE Beauvais

BANQUE D'EPREUVES FESIC

ADMISSION en 1ère ANNEE du 1er CYCLE 2012

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Samedi 12 mai 2012 de 14h à 16h30

INSTRUCTIONS AUX CANDIDATS

L'usage de la calculatrice est **interdit** ainsi que tout document ou formulaire.

L'épreuve comporte 16 exercices indépendants. Vous ne devez en traiter que 12 maximum. Si vous en traitez davantage, **seuls les 12 premiers** seront corrigés.

Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).

Toute réponse exacte rapporte un point.

Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.

L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

INSTRUCTIONS POUR REMPLIR LA FEUILLE DE REPONSES

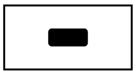
Les épreuves de la Sélection FESIC sont des questionnaires à correction automatisée. Votre feuille sera corrigée automatiquement par une machine à lecture optique. Vous devez suivre scrupuleusement les instructions suivantes :

Pour remplir la feuille de réponses, vous devez utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire ou bleue. Ne jamais raturer, ni gommer, **ni utiliser un effaceur**. Ne pas plier ou froisser la feuille.

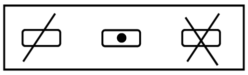
1. Collez l'étiquette code-barres qui vous sera fournie (le code doit être dans l'axe vertical indiqué). Cette étiquette, outre le code-barres, porte vos nom, prénom, numéro de table et matière. Vérifiez bien ces informations.

Exemple :

2. Noircissez les cases correspondant à vos réponses :



Faire



Ne pas faire

Pour modifier une réponse, il ne faut ni raturer, ni gommer, ni utiliser un effaceur. Annuler la réponse par un double marquage (cocher F et V) puis reporter la nouvelle réponse éventuelle dans la zone tramée (zone de droite). La réponse figurant dans la zone tramée n'est prise en compte que si la première réponse est annulée. Les réponses possibles sont :

V	F	V	F	
●	○	○	○	vrai
○	●	○	○	faux
●	●	○	○	abstention
○	○	○	○	abstention
●	●	●	○	vrai
●	●	○	●	faux
●	●	●	●	abstention

Attention : vous ne disposez que d'une seule feuille de réponses. En cas d'erreur, vous devez annuler votre réponse comme indiqué ci-dessus. Toutefois, en cas de force majeure, une seconde feuille pourra vous être fournie par le surveillant.

Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x) = \dfrac{(1-x)(1-e^x)}{x}$.

a) *On a*: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

b) *On a*: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

c) On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = -1$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

d) *On a*: $\lim\limits_{n\to +\infty} (n-1)\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right) = -1$.

Exercice n°2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 1)$.

a) *L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.*

b) *On a: $f(x) < 0$ si et seulement si $x < 0$.*

c) *Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on peut écrire $f(x) = 2\ln(e^x - 1)$.*

d) *La courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan possède pour asymptotes les axes du repère et la droite d'équation $y = 2x$.*

Exercice n°3

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ par: $f_n(x) = \ln(x) + 2\ln(n) - nx$ et on appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentant f_n dans un repère orthonormal du plan.

a) *Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$, on a*: $f_n'(x) = \dfrac{n+2x-xn^2}{nx}$.

b) On fixe n dans $\mathbb{N}^*$.

f_n est décroissante sur $]1, +\infty[$.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle M_n l'extremum de la courbe $\mathscr{C}_n$. On note (x_n, y_n) les coordonnées de M_n.

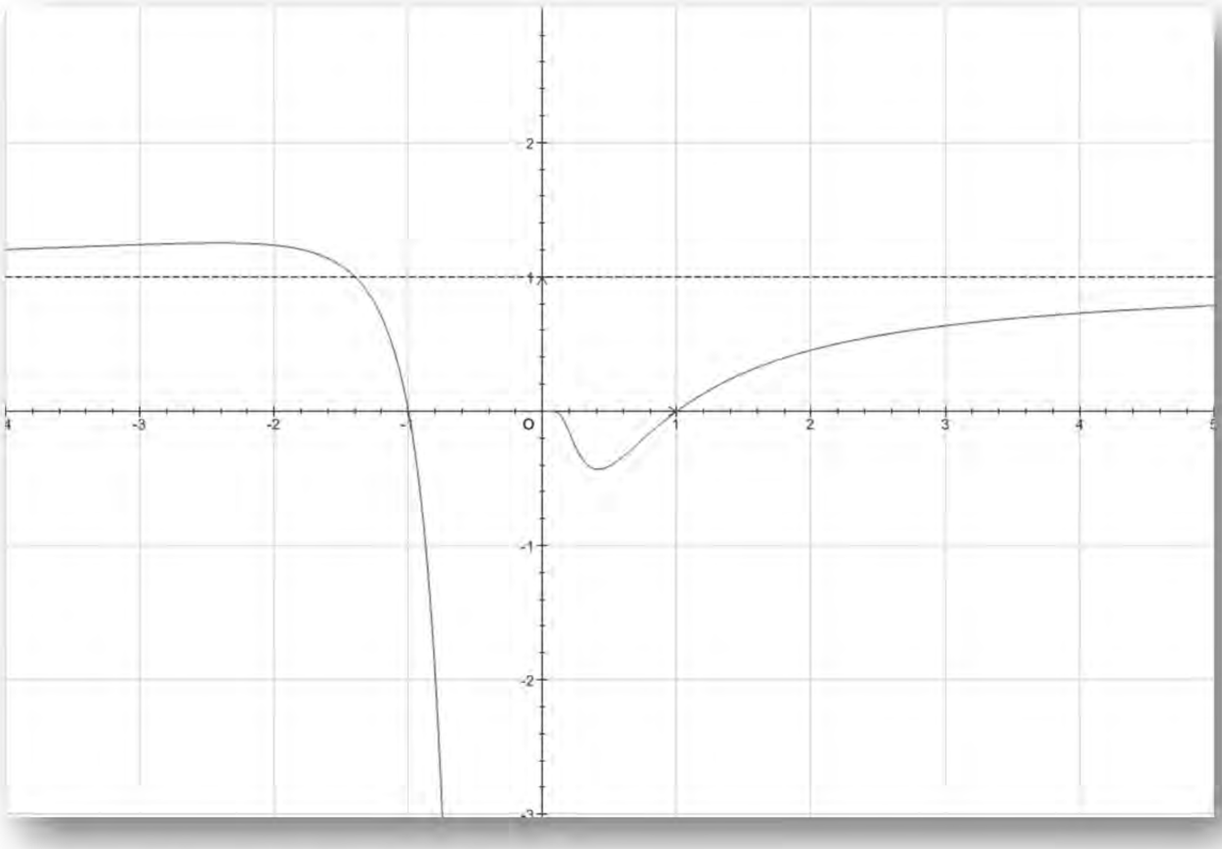
La suite $(x_n)_n$ est décroissante et la suite $(y_n)_n$ est croissante.

d) On fixe n dans $\mathbb{N}^*$.

La fonction F_n définie par: $\mathrm{F}_n(x) = x\ln x - x + 2x\ln n - \dfrac{nx^2}{2}$ *est la primitive de f_n sur $]0, +\infty[$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.*

Exercice n°4

On considère la représentation graphique suivante d'une fonction *f*.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant *f* et on suppose que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
On appelle *f* ' la dérivée de *f* lorsqu'elle existe.



a) *La limite de* $f(x)$ *quand x tend vers* 0 *existe*.

b) *Quand* x_0 *tend vers* 0 *par valeurs positives,* $\int_{x_0}^{1} f(x)\cdot \mathrm{d}x$ *représente l'aire, en unités d'aire, de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses*.

c) *La limite de* $f'(x)$ *quand x tend vers* $+\infty$ *est égale à* 1.

d) *Entre* 0 *et* 4, *la fonction f ' est décroissante, puis croissante, puis à nouveau décroissante*.

Exercice n°5

a) *On a*: $\int_0^{\pi} e^x \sin x \cdot \mathrm{d}x = e^{\pi} + 1$.

b) *Pour tout* $a \in \mathbb{R}^+$, *on a*: $\int_{-a}^{a} t^3 e^{-t^2} \cdot \mathrm{d}t = 0$.

c) *La fonction f définie sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *par* $f(x) = xe^{\frac{1}{x}\ln x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et sa dérivée est la fonction f ' définie par* $f'(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}\ln x}(x + 1 - \ln x)$.

d) *La suite u définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $u_n = (n^2 - 1)\sqrt{n}$ *est croissante*.

Exercice n°6

a) On cherche l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{15+2x-x^2}{x^2+10x+21}\right)$.

On tient pour cela le raisonnement suivant:

«f est définie si et seulement si on a $\dfrac{15+2x-x^2}{x^2+10x+21} > 0$.

Or $15 + 2x - x^2 = (3 + x)(5 - x)$ et $x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7)$. Il faut donc et il suffit d'avoir $\dfrac{5-x}{x+7} > 0$, soit $x \in]-7, 5[$.

Conclusion: l'ensemble de définition cherché est $]-7, 5[$.»

Ce raisonnement est exact.

b) On considère la fonction f, définie sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x^2 - x\ln(x^2)$.

On cherche à montrer que f est croissante sur I. On tient pour cela le raisonnement suivant:

«f est dérivable sur I. Pour $x \in I$, on a $f'(x) = 2(x - 1 - \ln x)$.

Or la représentation graphique de la fonction ln est située en dessous de ses tangentes en tout point. En particulier elle est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1 qui est la droite d'équation $y = x - 1$.

On en déduit que, quel que soit $x \in I$, on a: $\ln x \leq x - 1$.

Il s'ensuit que l'on a: $f'(x) \geq 0$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in I$, on en déduit que f est croissante sur I.»

Ce raisonnement est exact.

c) On considère quatre points A, B, C et D de l'espace, deux à deux distincts.

On appelle I le milieu de [AB] et, pour tout $m \in \mathbb{R}$, on appelle G_m le barycentre de $\{(A, 1), (B, 1), (C, m - 2), (D, m)\}$.

On cherche à montrer que, quel que soit $m \in \mathbb{R}$, G_m est situé dans le plan (ICD). On tient pour cela le raisonnement suivant:

«I est le milieu de [AB], donc I est le barycentre de $\{(A, 1), (B, 1)\}$.

Quel que soit $m \in \mathbb{R}$, et par associativité du barycentre, G_m est alors le barycentre de $\{(I, 2), (C, m - 2), (D, m)\}$.

On en déduit que G_m appartient au plan (ICD).»

Ce raisonnement est exact.

d) On considère la fonction f, définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} - \ln x - x$.

On considère la rédaction suivante qui donne le sens de variation de f.

«$f(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour $x \in]0, +\infty[$, on a $f'(x) = -e^{-x} - \dfrac{1}{x} - 1$.

$f'(x)$ est la somme de trois nombres négatifs, donc on a: $f'(x) < 0$.

Il s'ensuit que $f(x)$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.»

Cette rédaction est rigoureuse.

Exercice n°7

On considère l'équation différentielle [E]: $y' + 2y = 4$.

a) Soit z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

z est solution de [E] si et seulement si $z - 2$ est solution de l'équation $y' + 2y = 0$.

b) *L'application f, définie par $f(x) = 2(1 - e^{2(1-x)})$ est une solution de [E].*

c) *L'application g, définie par $g(x) = 2 - e^{2x+4}$ est la solution de [E] vérifiant $g(-2) = 1$.*

d) *L'application h, définie par $h(x) = 2 + \left(\dfrac{1}{e^{x+1}}\right)^2$ est la solution de [E] vérifiant $h'(-1) = -2$.*

Exercice n°8

On étudie l'évolution de deux fourmilières A et B.
Chaque mois, 20% des fourmis de A passent en B et 30% des fourmis de B passent en A.
Au bout d'un nombre de mois égal à n, on note u_n et v_n le nombre total (en milliers de fourmis) de fourmis présentes respectivement dans les fourmilières A et B.
On a dénombré que, initialement, on avait $u_0 = 320$ et $v_0 = 180$.

a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:* $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{4}{5}u_n + \dfrac{3}{10}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{7}{10}v_n \end{cases}$.

b) *La suite $s = u + v$ est une suite constante.*

c) *La suite $t = -2u + 3v$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = \dfrac{-100}{2^n}$.*

d) *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $v_n = 200 - \dfrac{20}{2^n}$.*

Exercice n°9

Soit u une suite numérique dont aucun terme n'est nul.

On définit la suite v par: $v_n = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

a) *Si u est convergente, alors v est convergente.*

b) *Si u est minorée par 1, alors v est majorée par 2.*

c) *Si u est majorée par 0,5, alors v est minorée par 3.*

d) On suppose ici que u est définie par: $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$.

Alors v est une suite géométrique.

Exercice n°10

On considère les suites u et v définies par: $u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$.

a) *On a*: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
b) *La suite v est croissante*.
c) *Les suites u et v sont adjacentes*.
d) *Quel que soit* $n\in\mathbb{N}^*$, *on a*: $2 \leq u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leq 3$.

Exercice n°11

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$, on appelle A le point dont l'affixe est $-i$.
Pour tout point M distinct de A, d'affixe $z = x + iy$ (écriture algébrique), on associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ (écriture algébrique) telle que: $z' = \frac{\overline{z}}{\overline{z}-i}$.

a) *On a*: $x' = \frac{x^2+y^2+y}{x^2+(y+1)^2}$.
b) *On a*: $\overline{z'} = \frac{z}{z+i}$.
c) *L'ensemble des points* M *tels que* $z' = \overline{z'}$ *est l'axe des ordonnées privé du point* A.
d) M' *appartient au cercle de centre* O *et de rayon* 1 *si et seulement si* M *appartient à la médiatrice de* [OA].

Exercice n°12

Soit a un nombre complexe non réel.
Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe a, le point B d'affixe ia, le point C d'affixe $-a$ et le point D dont l'affixe est le conjugué de a.

a) C *est l'image de* A *par la rotation de centre* B *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.
b) *On a*: $\left(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)=\frac{\pi}{2} + k\pi$, *où* $k\in\mathbb{Z}$.
c) *L'ensemble des points* M *d'affixe z telle que* $|z - a| = |z + a|$ *est la droite* (AC).
d) *Les points* A, B, C *et* D *sont situés sur un même cercle*.

Exercice n°13

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient $Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}$ et M le point du plan d'affixe Z.

a) *Le complexe* $2 - 2i$ *est de module* $2\sqrt{2}$ *et l'un de ses arguments est* $\dfrac{\pi}{4}$.

b) *On a:* $OM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi$, *où* $k \in \mathbb{Z}$.

c) *Quel que soit* $n \in \mathbb{N}$, *on a*: $Z^n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\cos\left(\dfrac{7n\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{7n\pi}{12}\right)\right)$.

d) *Il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que le point* M_n *d'affixe* Z^n *appartienne à l'axe des abscisses*.

Exercice n°14

Le code d'entrée dans un immeuble est composé de quatre chiffres.

a) *Il y a* 9999 *codes différents*.

b) Pour éviter les erreurs de saisie, certains occupants demandent qu'un même chiffre ne puisse pas être répété deux fois consécutivement.
Il y a alors 7290 *codes différents possibles*.

c) Certains occupants préféreraient que les 4 chiffres soient tous différents.
Il y aurait alors $\dbinom{10}{4}$ *codes différents possibles*.

d) Comme cet immeuble est situé à Paris, certains occupants souhaitent que le code choisi contienne le nombre «75».
Il y aurait alors 168 *codes différents possibles*.

Exercice n°15

On considère un espace probabilisé (Ω, p) et deux événements A et B dans Ω.
On sait que $p(A) = \frac{1}{5}$, que $p_A(B) = \frac{1}{3}$ et que $p\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{2}{3}$.
($p_A(B)$ désigne la probabilité d'obtenir B sachant que A est réalisé.)

a) *On a*: $p_{\overline{A}}(B) = \frac{5}{6}$.

b) *On a*: $p\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{3}$.

c) *On a*: $p(B) = \frac{11}{15}$.

d) *On a*: $p_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right) = \frac{2}{15}$.

Exercice n°16

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les plans P et Q d'équations respectives: P: $y = x + 2$ et Q: $z = 3 - 2y$.
On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'intersection de P avec Q.

a) *La droite* $\mathscr{D}$ *accepte pour vecteur directeur, le vecteur de coordonnées* $(1, 1, -2)$.
b) *La droite* $\mathscr{D}$ *passe par le point* A$(-1, 1, 1)$.
c) *Une équation du plan contenant la droite* $\mathscr{D}$ *et passant par* O *est*: $3x + y + 2z = 0$.
d) *La droite* $\mathscr{D}$ *coupe l'axe des ordonnées*.