CONCOURS ADVANCE

5 mai 2018

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Consignes aux candidats

Durée de l'épreuve : 1h30

Vous devez commencer par remplir la partie administrative de votre fiche optique, avec indication de votre nom, prénom, et en cochant les cases de votre identifiant personnel : le numéro QCM.

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.

- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.

- Pour chaque question :

    - Vous cochez la (ou les) case(s) **V** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.

    - Vous cochez la (ou les) case(s) **F** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.

    - Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses

- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée. **Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.**

- Seule la fiche optique est ramassée en fin d'épreuve.

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES

Vérifiez que votre épreuve est constituée de 4 pages numérotées de 1 à 4. Dans le cas contraire, demandez un nouveau sujet.

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 1 h 30

Questions obligatoires

1. (A) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3} = +\infty$

   (B) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

   (C) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-1}{x^2} = -\infty$

   (D) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e$

   (E) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

2. (A) Si $f(x) = -3x^4+2x^2+1$ alors $f'(x) = -12x^3+4x+1$

   (B) Si $f(x) = 2x^3+x+\dfrac{4}{x^2}$ alors $f'(x) = 6x^2+1+\dfrac{4}{x^3}$

   (C) Si $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x+1}$ alors $f'(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$

   (D) Si $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{e^x}$ alors $f'(x) = \dfrac{1-x\ln(x)}{xe^x}$

   (E) Si $f(x) = \cos^2(x)$ alors $f'(x) = -\sin(2x)$

3. Soit f la fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ définie par $f(x) = x - \ln(x^2)$. On donne $\ln(2) \approx 0,69$.

   (A) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

   (B) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

   (C) f est croissante sur $]0,+\infty[$

   (D) $f'(1) = 0$

   (E) Pour tout $x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant 0$

4. Soit f la fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ définie par $f(x) = e^{x+\ln(x)}$.

   (A) $f(1) = e$

   (B) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = e^x + x$

   (C) f est croissante sur $]0,+\infty[$

   (D) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = (x+1)e^x$

   (E) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$

5. Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x-3}{e^x-1}$.

   (A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

   (B) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

   (C) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

   (D) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x) = \dfrac{2}{(e^x-1)^2}$

   (E) f est croissante sur $]0,+\infty[$

6. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère que les 3 énoncés suivants sont vrais :

   P_1 : Si $f(0) = 1$ et $f(1) \neq 2$ alors $f(2) = 3$
   P_2 : Si $f(2) = 3$ ou $f(3) \neq 4$ alors $f(0) \neq 1$
   P_3 : Si $f(1) = 2$ alors $f(3) \neq 4$

   (A) P_2 est équivalent à : Si $f(0) = 1$ alors $f(2) \neq 3$ ou $f(3) = 4$

   (B) Si $f(0) = 1$ alors $f(2) \neq 3$

   (C) On peut avoir $f(0) = 1$ et $f(1) \neq 2$

   (D) On peut avoir $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$

   (E) On peut affirmer que $f(0) \neq 1$

Questions à choisir

7. Soit $q \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

   (A) Pour tout $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = S_n - 1$

   (B) Pour tout $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = qS_{n-1}$

   (C) Si $q = 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n$

   (D) Si $q = -1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 0$

   (E) Si $q \in]-1,1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$

8. Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(A) (u_n) est une suite géométrique

(B) (u_n) est croissante

(C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$

(D) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

(E) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

9. (A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}x = 1$

(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = 1 - \sqrt{2}$

(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(x)\right) \mathrm{d}x = 1$

(E) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x = 1$

10. Pour un nombre complexe z, $\mathrm{Re}(z)$ désigne sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire.
Soit S l'ensemble des solutions de l'équation complexe : $z + |z| = 1 + 2i$.

(A) Si $z \in S$ alors $z \notin \mathbb{R}$

(B) Si $z \in S$ alors $\mathrm{Im}(z) = 2$

(C) Si $z \in S$ alors $|z| \geqslant 2$

(D) Si $z \in S$ alors $\mathrm{Re}(z) \geqslant -1$

(E) $S = \{-1 + 2i\}$

11. (A) $\dfrac{1+2i}{2+i}$ est imaginaire pur

(B) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ est imaginaire pur

(C) $\dfrac{1-2i}{2+i}$ est réel

(D) $\left|\dfrac{1+2i}{2+i}\right| = 1$

(E) $\left|\dfrac{1+2i}{2-i}\right| = 1$

12. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $I(3,-2,2)$, $J(6,1,5)$, $K(6,-2,-1)$ et $L(0,4,-1)$.

(A) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = 0$

(B) Le triangle (IJK) est rectangle

(C) $KL^2 = KI^2 + IL^2$

(D) Le triangle (IKL) est rectangle

(E) Le triangle (IJL) est rectangle

13. La durée de vie, en années, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note f la fonction densité associée à T et on rappelle que pour tout $t \geqslant 0$ $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

(A) $P(T \leqslant 5) = \lambda(1 - e^{-5\lambda})$

(B) Si $P(T \leqslant 5) = 0,9$ alors $\lambda = \dfrac{\ln(10)}{5}$

(C) La probabilité que le composant ne fonctionne plus au bout de 5 ans, sachant qu'il fonctionne depuis 2 ans, est $P(2 \leqslant T \leqslant 5)$

(D) La probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure à 5 ans, sachant qu'il fonctionne depuis 2 ans, est $\dfrac{P(T \geqslant 5)}{P(T \geqslant 2)}$

(E) Si l'espérance de T est 5 alors $\lambda = 5$

14. Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$, qui a 3 racines réelles dans $]-2, 2[$ dont une seule dans $]1, 2[$.
On note α la racine dans $]1, 2[$. Pour avoir une valeur approchée de α on utilise l'algorithme suivant :

```
Entrées :      Donner les valeurs de a, b, N
Variables :    x réel, i entier
Traitement :   Pour i allant de 1 à N
                   x ← a − (b − a)/(f(b) − f(a)) f(a)
                   Si f(a)f(x) > 0
                       a ← x
                   Sinon
                       b ← x
                   Fin Si
               Fin Pour
Sortie :       Afficher x
```

(A) L'algorithme est basé sur le théorème des valeurs intermédiaires

(B) Dans l'algorithme, x est l'abscisse du point intersection d'une droite avec l'axe des abscisses

(C) Pour obtenir une valeur approchée de α, on peut donner en entrées pour a et b : $a = 0$ et $b = 2$

(D) Les entrées $\left(a = 1, b = 2, N = 10\right)$ et $\left(a = 2, b = 1, N = 10\right)$ donneront la même sortie

(E) On peut remplacer la boucle « Pour i allant de 1 à N » par une boucle conditionnelle « Tant que $(b - a) > 10^{-N}$ »