MATHÉMATIQUES

Sur la Learning Box, sont disponibles : le public concerné par l'épreuve, la méthode, le programme de révision, la bibliographie et les annales des concours précédents. Accès via votre espace candidat sur www.passerelle-esc.com

▸ DURÉE : 2 HEURES

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par: $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$

1. Etablir que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule.

2. Montrer que le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = & 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = & 0 \end{cases}$$

admet une unique solution $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, vérifiant

$$\begin{cases} e^{-x_0} & = x_0 \\ y_0 & = \frac{x_0}{2}. \end{cases}$$

3. Montrer que f admet un minimum en (x_0, y_0).

Exercice 2

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Calculer A^2 en fonction de A.

b) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de A est inclus dans $\{0, 3\}$.

2. a) Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre, une base du sous-espace propre associé.

b) La matrice A est-elle diagonalisable?

3. On note

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calculer PQ et PDQ.

b) Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Y = QXP$. Montrer que $AX - XA = 3X \Leftrightarrow DY - YD = 3Y$.

c) Déterminer l'ensemble des matrices $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que: $DY - YD = 3Y$.

d) En déduire que l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AX - XA = 3X$, est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ sinon.
a) Vérifier que f est une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de densité f.
b) Montrer que $Y = X^2$ est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.
c) Calculer l'espérance et la variance de Y.

Barème :
6 pts pour l'exercice 1*; 9 pts pour l'exercice* 2*; 5 pts pour l'exercice* 3