# MATHÉMATIQUE

**DURÉE : 2 HEURES**



## Exercice 1

Un enfant effectue $n$ lancers d'un dé équilibré. Il gagne une bille si le résultat est pair et en perd une si le résultat est impair.

**1.** Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de parties où le résultat est pair. Déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

On suppose que l'on est dans les conditions de l'approximation normale.

**2.** Montrer que $P\left(\dfrac{X-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} > \dfrac{-21}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$ équivaut à $n \leqslant 162$.

**3.** Soit $G = 2X - n$. Que représente $G$ ? Déterminer l'espérance et la variance de $G$.

**4.** Donner un majorant du nombre de lancers $n$ pour que l'on ait au moins une probabilité égale à $0,95$ pour perdre 20 billes au plus.

Le tableau suivant comporte des valeurs approchées de la fonction de répartition $\phi$ de la loi normale centrée réduite :

| $x$ | $1,645$ | $2,054$ | $2,326$ | $2,576$ | $3,090$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\phi(x)$ | $0,950$ | $0,980$ | $0,990$ | $0,995$ | $0,999$ |

## Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On s'intéresse à l'équation (1) : $X^2 + 2X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

**1.** Justifier que $A$ est diagonalisable.

**2.** Montrer que le polynôme caractéristique de $A$ est $\chi_A(X) = X^2(X-6)(X+2)$.

**3.** Déterminer le rang de $A$. Justifier alors que 0 est bien valeur propre de $A$ de multiplicité 2.

**4.** Préciser une matrice $D$ diagonale et une matrice $P$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
On ne demande pas $P^{-1}$.

**5.** Montrer que (1) se ramène à une équation de la forme $Y^2 + 2Y = D$.

**6.** Montrer que cette dernière équation se ramène à une équation de la forme $Z^2 = D + I$ où $I$ est la matrice identité de taille 4.

**7.** Conclure que l'équation (1) n'a pas de solution. On pensera à utiliser la notion de déterminant.

## Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$.

**1.** Calculer les dérivées partielles de $f$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

**2.** Justifier que $f$ admet des dérivées partielles en $(0,0)$. Les donner.

On dit qu'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifie $(*)$ si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
- $g(0,0) = 0$.
- $g$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2\,f(x,y)$.

**3.** Montrer que la fonction $f$ vérifie $(*)$.

**4.** Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour $(x,y) \in U$, on pose $u = x$ et $v = \dfrac{y}{x}$. Soit $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathrm{C}^1$ sur $U$ et $G$ définie par $G(u,v) = g(u, uv)$.

a) Montrer que : $\forall (x,y) \in U$, $x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = u\dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v)$.

b) En déduire toutes les fonctions $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathrm{C}^1$ sur $U$ vérifiant l'équation :

$$(E_0) \qquad x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$$

c) Montrer que $g$ vérifie $(E)$ : $x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2\,f(x,y)$ si et seulement si $g - f$ vérifie $(E_0)$.
En déduire toutes les fonctions $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathrm{C}^1$ sur $U$ vérifiant $(E)$.

Barème : 5 pts pour l'exercice 1 ; 8 pts pour l'exercice 2 ; 7 pts pour l'exercice 3.