Corrigé

Exercice 1

1. La variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On a alors $E(X) = \dfrac{n}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n}{4}$.

2. Si ϕ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a :

$$P\left(\frac{X-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} > \frac{-21}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95 \iff P\left(\frac{X-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leqslant \frac{-21}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 0,05 \iff \phi\left(\frac{-21}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 0,05 \iff \phi\left(\frac{21}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$$

Or par le tableau, $\phi(1,645) \simeq 0,95$. Donc $\phi(x) \geqslant 0,95$ équivaut à $x \geqslant 1,645$. Finalement :

$$P\left(\frac{X-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} > \frac{-21}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95 \iff \phi\left(\frac{21}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95 \iff \frac{21}{\sqrt{n}} \geqslant 1,645 \iff n \leqslant 162$$

3. On a $G = 2X - n = 1 \times X + (-1) \times (n - X)$, G représente le gain du joueur au bout des n parties. Par la question 1 et les propriétés de l'espérance et de la variance, on a $E(G) = 0$ et $V(G) = n$.

4. On doit majorer n de sorte que $P(G > -21) \geqslant 0,95$. Or :

$$P(G > -21) \geqslant 0,95 \iff P(2X - n > -21) \geqslant 0,95 \iff P\left(\frac{X-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} > \frac{-21}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$$

D'après la question 2, le majorant de n cherché est 162.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est symétrique et à coefficients réels. Elle est donc diagonalisable.

2. On a $\chi_A(X) = \det(A - XI)$ et

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1-X & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1-X & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1-X \end{vmatrix}, \\
&\underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_4\,;\, C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -X & 2 & 1 \\ X & 0 & 1-X & 2 \\ 0 & X & 2 & 1-X \end{vmatrix}, \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3\,;\, L_2 \leftarrow L_2 + L_4}{=} X^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2-X & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2-X \\ 1 & 0 & 1-X & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1-X \end{vmatrix}, \\
&\underset{\text{dev 3-ième ligne}}{=} X^2 \begin{vmatrix} 0 & 2-X & 4 \\ 0 & 4 & 2-X \\ 1 & 2 & 1-X \end{vmatrix}, \\
&\underset{\text{dev 3-ième ligne}}{=} X^2 \begin{vmatrix} 2-X & 4 \\ 4 & 2-X \end{vmatrix}, \\
&= X^2(X-6)(X+2).
\end{aligned}$$

1

3. Les deux premières colonnes de A ne sont pas liées car $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Dans A, la colonne C_1 est égale à la colonne C_3 et la colonne C_2 à C_4. Le rang de A est égal à 2. On a $\det(A) = 0$ et 0 est bien valeur propre de A. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$. Comme A est diagonalisable, $\dim(\mathrm{Ker}(A))$ est la multiplicité de la valeur propre 0. Et 0 est bien valeur propre de A de multiplicité 2.

4. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a $C_1 = C_3$ et $C_2 = C_4$ donc $\mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4) \subset \mathrm{Ker}(A)$. La famille $(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$ est libre et $\dim(\mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)) = 2 = \dim(\mathrm{Ker}(A))$. D'où $\mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2 - e_4) = \mathrm{Ker}(A)$.

Les valeurs propres -2 et 6 sont simples donc leur espace propre associé est de dimension 1. La somme des colonnes de la matrice $A - 6I$ vaut 0, donc l'espace propre associé à $\lambda = 6$ est engendré par le vecteur $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Si on note $C_j(A+2I)$ la j-ème colonne de $A+2I$, on a $C_1(A+2I) - C_2(A+2I) + C_3(A+2I) - C_4(A+2I)$. L'espace propre associé à $\lambda = -2$ est engendré par le vecteur $e_1 - e_2 + e_3 - e_4$.

Finalement on peut prendre $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5. On a :

$$\begin{aligned}
X^2 + 2X = A \quad & \underset{question\ 1et4}{\iff} \quad X^2 + 2X = PDP^{-1} \\
& \iff \quad P^{-1}(X^2 + 2X)P = D \\
& \iff \quad P^{-1}X^2P + 2P^{-1}XP = D \\
& \underset{P^{-1}X^2P = (P^{-1}XP)^2}{\iff} \quad Y^2 + 2Y = D \quad \text{avec } Y = P^{-1}XP\,.
\end{aligned}$$

6. En posant $Z = Y + I$, on $Z^2 = Y^2 + 2Y + I$ et $Y^2 + 2Y = D$ si et seulement si $Z^2 = D + I$.

7. On a $\det(D + I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 < 0$. Or $\det(Z^2) = (\det(Z))^2 \geqslant 0$ (Z est à coefficients réels). L'équation $Z^2 = D + I$ n'a donc pas de solution, il en va de même pour l'équation (1) : $X^2 + 2X = A$ d'après les questions précédentes.

Exercice 3

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+y^4}} = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{4y^3}{2\sqrt{x^4+y^4}} = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

2. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \dfrac{\sqrt{x^4}}{x} = x$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x}$ existe et vaut 0. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. En échangeant le rôle de x et de y, on trouve que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut aussi 0.

3. La fonction f vérifie $f(0,0) = 0$.
La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car :
– f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
– f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $0 \leqslant \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{|x^3|}{\sqrt{x^4}} = |x|$. Donc $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. De même, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
– La fonction f admet en tout point des dérivées partielles continues.

Enfin, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, d'après la question **1**,
$x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^4}{\sqrt{x^4+y^4}} + \dfrac{2y^4}{\sqrt{x^4+y^4}} = 2\dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^4+y^4}} = 2\,f(x,y)$.
D'après la question 2, l'équation $x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2\,f(x,y)$ reste vraie quand $x=0$ et $y=0$.

4.a) Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour $(x,y) \in U$, on pose $u = x$ et $v = \dfrac{y}{x}$. Soit $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur U et G définie par $G(u,v) = g(u,uv)$. On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial G}{\partial v}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial G}{\partial v}$$

Ainsi : $\forall (x,y) \in U$, $x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v) = u\dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v)$.

b) Soit $g : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U.

D'après a) : $x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \iff u\dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v) = 0 \iff \dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v) = 0$ (car $u \neq 0$). Or $\dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v) = 0$ équivaut à G constante en u soit $G(u,v) = \varphi(v)$ avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 car G l'est.

Les fonctions $g : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U vérifiant l'équation (E_0) sont les fonctions du type $g(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

c) Soit $(E) : x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2\,f(x,y)$.

Si g vérifie (E) comme f vérifie (E), on a
$x\dfrac{\partial(g-f)}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial(g-f)}{\partial y}(x,y) = x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) - \left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = 2f(x,y) - 2f(x,y) = 0$,
donc $g-f$ vérifie (E_0).

Inversement, si $g-f$ vérifie (E_0), $x\dfrac{\partial(g-f)}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial(g-f)}{\partial y}(x,y) = 0$ et
$x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y)$ et g vérifie (E).

D'après ce qui précède et la question b), les fonctions $g : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U vérifiant (E) sont définies sur U par $g(x,y) = f(x,y) + \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1.