Corrigé

Exercice 1

1)

a) *Pour tout entier* $k \geq 2$, $\ln(k-1) \leq \int_{k-1}^{k} \ln x \, \mathrm{d}x \leq \ln k$ *car la fonction* $\ln$ *est croissante sur* $\mathbb{R}_*^+$. *On en déduit:*

$$\int_{k-1}^{k} \ln x \, \mathrm{d}x \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln x \, \mathrm{d}x$$

b) *Soit* $n \geq 2$ *un entier. En faisant varier* k *de* 2 *à* n *et en additionnant, membre à membre, les inégalités établies dans la première question, on obtient*

$$\int_{1}^{n} \ln x \, \mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k \leq \int_{2}^{n+1} \ln x \, \mathrm{d}x$$

On conclut en remarquant que $\ln(n!) = \ln(2 \times \cdots \times n) = \sum_{k=2}^{n} \ln k$.

c) *La fonction* $x \mapsto x \ln x - x$ *est une primitive de la fonction* $\ln$. *On en déduit* $\int_{1}^{n} \ln x \, \mathrm{d}x = n \ln n - n + 1$ *et* $\int_{2}^{n+1} \ln x \, \mathrm{d}x = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$.

d) *De ce qui précède, on déduit*

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2.$$

D'où

$$1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n!)}{n \ln n} \leq \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{n+1}{n \ln n} - \frac{2\ln 2 - 2}{n \ln n}$$

Par encadrement $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n} = 1$.

2)

a) *Notons* f *la fonction* $x \mapsto x \ln x$ *définie sur* $]0, +\infty[$. *Elle est strictement positive sur* $]1, +\infty[$. *Donc la fonction* $\frac{1}{f}$ *est bien définie sur* $]1, +\infty[$. *Pour tout* $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = 1 + \ln x$. f' *étant positive sur* $[1, +\infty[$, f *y est croissante. Il s'en suit que* $\frac{1}{f}$ *est décroissante sur* $]1, +\infty[$.
Il en résulte que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n \ln n} \geq \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} \, \mathrm{d}x$.

b) *Soit* $N \geq 2$, *un entier. En faisant varier* n *de* 2 *à* N *et en additionnant, membre à membre, les inégalités établies dans la question précédente, on obtient*
$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n} \geq \int_{2}^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$

c) *La fonction* $x \mapsto \ln(\ln x)$ *est une primitive de la fonction* $\frac{1}{f}$. *Donc*

$$\int_{2}^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2)$$

Or $\lim_{N \to +\infty} \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2) = +\infty$. *La série* $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ *est donc divergente, d'après la question précédente.*

d) *D'après la question* **1)d)**, *les termes généraux des deux séries positives* $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ *et* $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n!)}$ *sont équivalents. Elles sont donc de même nature.*

D'après la question précédente, la première série est divergente, d'où la divergence de la deuxième.

Exercice 2

1)

a) *On obtient* $S = 2I$, *d'où* ${}^tXSX = 2(x^2 + y^2 + z^2)$.

b) *On a* $AX = \lambda X$ *et donc* ${}^tX{}^tA = \lambda{}^tX$, *d'où:*

$$ {}^tXAX = {}^tX{}^tAX = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) $$

c) *D'après les deux questions précédentes:*

$$ 2(x^2 + y^2 + z^2) = {}^tXSX = \frac{1}{2}{}^tX(A + {}^tA)X = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) $$

Comme X *est un vecteur propre, il est non nul et donc* $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$. *D'où* $\lambda = 2$.

2) *Supposons qu'il existe une matrice réelle* D *diagonale et une matrice réelle inversible telles que :* $P^{-1}AP = D$. *Les valeurs propres de* A *sont donc toutes réelles et valent* 2 *(d'après la question précédente),* D *serait donc égale à* $2I$ *(où* I *est la matrice identité d'orde* 3*). Ainsi* $A = PDP^{-1} = 2I$ *et donc:* $a = b = c = 0$. *Ce qui contredit les hypothèses de l'énoncé.*
Conclusion: A *n'est pas diagonalisable.*

Exercice 3

1) *La fonction* f *est positive sur* $\mathbb{R}$, *continue sur* $\mathbb{R}^*$ *et on remarque qu'elle est continue en* 0. *Dans ces conditions* f *sera une densité si et seulement si l'intégrale* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *converge et vaut* 1.
Or f *est nulle sur* $\mathbb{R}_-^*$, *donc* $I = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.
Pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \left[-e^{\frac{-t^2}{2}}\right]_0^x = 1 - e^{\frac{-x^2}{2}}$. *Comme* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$, *on alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1$. *Ainsi* $I = 1$. *Conclusion: La fonction* f *est une densité.*

2)

a) *Pour tout* $x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = 0$ *(car* f *est nulle sur* $]-\infty, x]$*).*
Pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0 + 1 - e^{\frac{-x^2}{2}} = 1 - e^{\frac{-x^2}{2}}$. *En résumé*

$$ \begin{cases} F(x) &= 0 \quad si\ x < 0. \\ F(x) &= 1 - e^{\frac{-x^2}{2}} \quad si\ x \geq 0. \end{cases} $$

b) *Soit* Y *une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On sait que* $E(Y) = 0$ *et* $V(Y) = 1$. *Or* $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$ *(d'après Koenig Huygens). Par conséquent* $E(Y^2) = 1$.
Mais par définition, $E(Y^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$, *donc* $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$. *La fonction* $t \mapsto t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}$ *étant paire, on peut affirmer sans problème que :*

$$ \int_0^{+\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}. $$

On a donc:

$$ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 tf(t)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 0 + \int_0^{+\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}. $$