Corrigé

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Y = \ln(X)$.

1. La variable Y est à valeurs dans $]-\infty, 0]$. Pour tout $t \leqslant 0$, $P(Y \leqslant t) = P(X \leqslant e^t) = e^t$ car $e^t \in [0,1]$ si $t \leqslant 0$. La fonction de répartition F_Y de Y est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_Y(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est à valeurs dans $[0,1]$, elle est croissante et continue sur $\mathbb{R}$, $\lim_{t\to-\infty} F_Y(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F_Y(t) = 1$. La variable Y est une variable à densité et une densité f_Y est obtenue en dérivant F_Y. On a :

$$f_Y(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. La fonction $t \mapsto te^t$ est intégrable sur $\mathbb{R}_-$ car cette fonction est continue, de signe constant et quand $t \to -\infty$, $te^t = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La variable Y admet alors une espérance et une variance.

On a alors $E(Y) = \int_{-\infty}^{0} te^t \, dt$ qui par le changement de variable $u = -t$, se transforme en $E(Y) = -\int_0^{+\infty} ue^{-u} \, du$. On reconnait l'opposée de l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On a donc $\boxed{E(Y) = -1.}$ On peut retrouver ce résultat en faisant une intégration par parties.

Pour la variance de Y, $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$. En remarquant comme précédemment que la variable $-Y$ suit une loi exponentielle de paramètre 1. On obtient $\boxed{V(Y) = 1.}$ On peut retrouver ce résultat en intégrant deux fois par parties l'intégrale $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{0} t^2 e^t \, dt$.

3.a) On a $S = \ln(Z) = \sum_{k=1}^{100} \ln(X_k)$. Par linéarité de l'espérance, $E(S) = \sum_{k=1}^{100} E(\ln(X_k))$. Or chaque variable $\ln(X_k)$ suit la même loi que $Y = \ln(X)$. Par la question précédente, $E(Y) = -1$. Donc $\boxed{E(S) = -100.}$

Comme les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ sont indépendantes, les variables aléatoires $\ln(X_1), \ln(X_2), \ldots, \ln(X_{100})$ le sont aussi. La variance de S est la somme des variances des variables $\ln(X_k)$. On a donc $\boxed{V(S) = 100}$ et son écart-type est $\boxed{\sigma(S) = 10.}$

b) On cherche à appliquer le théorème de la limite centrée. Pour cela, on centre S. On écrit :

$$P(Z > 10^{-30}) = P(S > -30\ln(10)) = P\left(\frac{S+100}{10} > \frac{-30\ln(100)+100}{10}\right) = P\left(\frac{S+100}{10} > 10 - 3\ln(10)\right).$$

On a $10 - 3\ln(10) \simeq 0,090$. Par le théorème de la limite centrée, $P(Z > 10^{-30}) \simeq 1 - \phi(0,090)$. Et par lecture du tableau, $\boxed{P(Z > 10^{-30}) \simeq 10^{-3}.}$

Exercice 2

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique à coefficients réels. Par le théorème spectral, la matrice A est diagonalisable dans une base orthonormale.

2. Le rang de A est la dimension de $\mathrm{Im}A$ qui est engendré par les vecteurs colonnes de A. Notons les C_1, C_2, C_3, C_4. Les colonnes C_2, C_3, C_4 sont liées car toutes colinéaires au vecteur e_1. La famille (C_1, e_1) est libre car $C_1 \in \mathrm{Vect}(e_2, e_3, e_4)$. On a donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2.}$

3. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. Les vecteurs $a_2e_2 - a_1e_3$ et $a_3e_2 - a_1e_4$ appartiennent au noyau de f. La famille $(a_2e_2 - a_1e_3, a_3e_2 - a_1e_4)$ est libre et son cardinal est égal à $\dim(\mathrm{Ker}(f))$.
La famille $(a_2e_2 - a_1e_3, a_3e_2 - a_1e_4)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

4. Le nombre 0 est valeur propre de A car le noyau de f n'est pas réduit 0. Comme A est diagonalisable, la multiplicité de la valeur propre 0 est égale à la dimension de l'espace propre associé à 0, donc à $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ qui vaut 2.

5. On a $\mathrm{tr}(A) = 0$. Et on calcule A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_k^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ 0 & a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ 0 & a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathrm{tr}(A^2) = 2\sum_{k=1}^{3} a_k^2 = 2$ car $\sum_{i=1}^{3} a_i^2 = 1$.

On sait déjà que zéro est valeur propre de A de multiplicité 2. Il reste donc deux valeurs propres à découvrir, éventuellement confondues, mais non nulles : on les note λ_1 et λ_2. Un calcul dans une base propre pour A, donc aussi pour A^2, montre alors que

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\, A &= 0 = \lambda_1 + \lambda_2 , \\ \mathrm{tr}\, A^2 &= 2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 . \end{aligned}$$

6. En résolvant le système précédent, on en déduit (moyennant un choix arbitraire des signes) que $\boxed{\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = -1}$.

La matrice A a trois valeurs propres : 0, -1 et 1. La première est de multiplicité 2 et les deux dernières de multiplicité 1.

Soit x un vecteur de composantes $x_1, \ldots, x_4$ dans la base $(e_1, \ldots, e_4)$; l'équation $f(x) = \varepsilon x$, avec $\varepsilon = \pm 1$, équivaut successivement à (car $\vec{a}$ est unitaire) :

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 x_2 + a_2 x_3 + a_3 x_4 &= \varepsilon x_1 , \\ \forall k \in \{1,2,3\}, \quad a_k x_1 &= \varepsilon x_{k+1} , \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} \varepsilon(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) x_1 &= \varepsilon x_1 , \\ \forall k \in \{1,2,3\}, \quad \varepsilon a_k x_1 &= x_{k+1} , \end{aligned} \right.$$
$$\iff \forall k \in \{1,2,3\}, \quad \varepsilon a_k x_1 = x_{k+1}.$$

On lit ci-dessus que le sous-espace propre $E_\varepsilon(f)$ est la droite engendrée par le vecteur $e_1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{3} a_k e_{k+1} = e_1 + \varepsilon \vec{a}$.

Exercice 3

1. Pour tout $n \geqslant 1$, a_n est un nombre au moins égal à 1. Démontrons le par récurrence.
- On a $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$, donc $a_1 \geqslant 1$ et $a_2 \geqslant 1$.
- Si pour un $n \geqslant 2$, $a_{n-1} \geqslant 1$ et $a_n \geqslant 1$, alors $a_{n+1} \geqslant 1 + \dfrac{2}{n+1} \geqslant \dfrac{n+3}{n+1} \geqslant 1$.

Montrons que $a_n \leqslant n^2$ par récurrence sur $n \geqslant 1$. Comme $a_2 = a_1 + \frac{2}{2} = 2 \leqslant 4$, la majoration est vraie pour $n = 1$ ou 2. Si elle est vraie aux rangs $n-1$ et n, alors

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \leqslant n^2 + \frac{2(n-1)^2}{n+1} \leqslant n^2 + 2(n-1) \leqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 ,$$

ce qui achève la récurrence.

2. La série géométrique $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. Le rayon de convergence de cette série entière est donc égal à 1.

La série $\sum_{n \geqslant 0} n^2 x^n$ est la somme des trois séries $\sum_{n \geqslant 0} (n+2)(n+1) x^n$, $-3x \sum_{n \geqslant 1} n x^{n-1}$ et $-2 \sum_{n \geqslant 0} x^n$. Les deux premières séries s'obtiennent par dérivation de la série géométrique $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ donc sont toutes les trois de rayon de convergence 1.

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} n^2 x^n$ est <u>égal à 1</u>.

On peut retrouver que le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} n^2 x^n$ est 1, en appliquant la règle de D'Alembert.

3.
- Si $|x| < 1$, la série $\sum_{n \geqslant 0} n^2 x^n$ converge absolument par la question 2, donc par comparaison (question 1), la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ converge absolument donc converge.
- Si $|x| \geqslant 1$, la série $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ diverge par la question 2, donc par comparaison (question 1), la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ diverge.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. Et par définition, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est égal à 1.

4.a) La somme d'une série entière est de classe C^∞ à l'intérieur de l'intervalle de convergence. D'après la question précédente, la somme S est définie et dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$. On dérive S terme à terme. On a :

$$\begin{aligned}
(x-1)y' + (2x+1)y &= (x-1)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} + (2x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(na_n - (n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} + a_n\right) x^n \; - a_1 + a_0\,,\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\left[-a_{n+1} + a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}\right] x^n \; -1+1\,,\\
&= 0 \quad \text{car } a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi la somme S est solution de (E).

b) Sur $]-1,1[$, cette équation équivaut à $y'(x) + (2 + \frac{3}{x-1})y(x) = 0$. Une primitive de $x \mapsto 2 + \frac{3}{x-1}$ sur $]-1,1[$ est $x \mapsto 2x + 3\ln(1-x)$, et les solutions sont de la forme $x \mapsto C\exp(-2x - 3\ln(1-x))$, où C est une constante. Comme $S(0) = a_0 = 1$, on a $C = 1$ et finalement :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}\,.$$