MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 HEURES.

CONSIGNES

Aucun document n'est autorisé.
Calculatrices interdites.

SUJET

EXERCICE 1

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi, avec:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_1 = k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Soit $Y = \sup(X_1, X_2)$.

1. Calculer $P(Y \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. En déduire la loi de Y.

EXERCICE 2

On associe à tout nombre réel p la matrice

$$A(p) = \begin{pmatrix} 1-p & p(1-p) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A(p)$ admet des valeurs propres réelles si et seulement si p appartient à l'intervalle $J = [\frac{-1}{3}, 1]$.

On suppose dans tout ce qui suit que p appartient à J et l'on note q et r les valeurs propres distinctes ou non de la matrice $A(p)$.

2. a) Que valent $p+q+r$? et $pq+qr+rp$?

b) En déduire que p et r sont les valeurs propres de $A(q)$ et que q et r appartiennent également à l'intervalle J.

3. a) Donner une base de chaque sous-espace propre de $A(p)$.

b) Pour quelles valeurs de $p \in J$, $A(p)$ est-elle diagonalisable?

EXERCICE 3

1. On considère l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_0^1 x\,(\frac{1}{x} - 1)^\alpha \mathrm{dx}$$

Montrer qu'elle est convergente si et seulement si $-1 < \alpha < 2$.

2. On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{(1+t^2)^n}$ pour n entier strictement positif.

a) Justifier l'existence de J_n.

b) En utilisant une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1}, pour tout $n \geq 1$.

3. a) Calculer J_3.

b) A l'aide du changement de variable: $(\frac{1}{x} - 1)^{\frac{1}{2}} = t$, Calculer $I(\frac{-1}{2})$.

Barème :
3 pts pour l'exercice 1; 9 pts pour l'exercice 2; 8 pts pour l'exercice 3