CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$P[Y \leq k] = P([X_1 \leq k] \cap [X_2 \leq k]) = P[X_1 \leq k]P[X_2 \leq k] = (P[X_1 \leq k])^2$$

puisque X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi.

De plus $P[X_1 \leq k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$.

Donc $P[Y \leq k] = (1 - \frac{1}{2^{k+1}})^2$.

2. On a $P[Y = k] = P[Y \leq k] - P[Y \leq k-1] = (1 - \frac{1}{2^{k+1}})^2 - (1 - \frac{1}{2^k})^2 = \frac{1}{2^k}(1 - \frac{3}{2^{k+2}})$.

3. On a $E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP[Y = k] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} - \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{4^k}$. Pour $p \in [0, 1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} kp^k = \frac{p}{1-p}$.

D'où $E(Y) = \frac{3}{4}$.

EXERCICE 2

1. Le polynôme caractéristique de $A(p)$ est:

$$Q_p(\lambda) = \det(A(p) - \lambda I) = \lambda^2 - (p-1)\lambda - p(1-p)$$

c'est un polynôme du second degré, ses racines sont réelles si et seulement si son discriminant est positif c.a.d si et seulement si $(1-p)^2 + 4p(1-p) = (1-p)(1+3p) \geq 0$, d'où le résulat.

2. a) q et r sont racines de Q_p donc $q + r = 1 - p$ et $qr = -p(1-p)$, d'où $p + q + r = 1$ et $pq + qr + rp = p(q+r) + qr = p(1-p) - p(1-p) = 0$.

b) D'après la question précédente: on a $1 - q = p + r$ et $-q(1-q) = -q(p+r) = pr$, donc le polynôme caractéristique de $A(q)$ est:

$$Q_q(\lambda) = \lambda^2 - (q-1)\lambda - q(1-q) = \lambda^2 - (p+r)\lambda + pr = (\lambda - p)(\lambda - r)$$

donc p et r sont les valeurs propres de $A(q)$. Comme elles sont réelles(car $p \in J$), il s'en suit d'après la première question que $q \in J$.

Le même raisonnement prouve que $A(r)$ possède p et q comme valeurs propres et que $r \in J$.

3. a) Soit I la matrice identité. D'après la question 2a), on a

$$A(p) - qI = \begin{pmatrix} r & -qr \\ 1 & -q \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le sous-espace propre de $A(p)$ associé à la valeur propre q est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même le sous-espace propre de $A(p)$ associé à la valeur propre r est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $q \neq r$, $A(p)$ admet deux sous-espaces propres qui sont supplémentaires donc elle est diagonalisable.

Si $q = r$, q est une valeur propre double de $A(p)$ alors que le sous-espace propre associé est de dimension 1, par conséquent $A(p)$ n'est pas diagonalisable.

Pour $p \in J$, $A(p)$ est donc diagonalisable si et seulement si q et r sont distinctes ce qui équivaut à avoir le discriminant du polynôme Q_p non nul c.à.d $p \in]-\frac{1}{3}, 1[$.

CORRIGÉ

PASSERELLE 2

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 3

1. La fonction $f_\alpha : x \mapsto x\,(\frac{1}{x}-1)^\alpha$ est continue sur $]0,1[$ donc elle est localement intégrable sur cet intervalle. Les problèmes se posent exclusivement en 0 et 1. $I(\alpha)$ est convergente si et seulement si $I_1(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{2}} f_\alpha(x)dx$ et $I_2(\alpha) = \int_1^{\frac{1}{2}} f_\alpha(x)dx$ convergent séparément.

f_α étant positive, on peut utiliser directement un théorème de comparaison:

Au voisinage de 0, $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$, donc $I_1(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, autrement dit $\alpha < 2$.

Au voisinage de 1, $f_\alpha(x) \sim (1-x)^\alpha$, donc $I_2(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

En conclusion $I(\alpha)$ converge si et seulement si $-1 < \alpha < 2$.

2.

a) La fonction $g_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc elle y est localement intégrable. Le problème se pose seulement en $+\infty$, donc

J_n est de même nature que $\int_1^{+\infty} g_n(t)dt$.

g_n étant positive, on peut utiliser un théorème de comparaison:

Au voisinage de l'infini, $g_n(t) \sim \dfrac{1}{t^{2n}}$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2n > 1$, ce qui assure la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}}$ et par suite celle de $\int_1^{+\infty} g_n(t)dt$. D'où la convergence de J_n.

Soient $n \geq 2$ et $A > 0$, on a $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} = \dfrac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}$

d'où

$$\int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^n}dt$$

Intégrons par parties cette dernière intégrale en posant $u = t$, $u' = 1$ et $v' = \frac{t}{(1+t^2)^n}$, $v = \frac{-1}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}}$

il vient :

$$\int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} + \left[\frac{t}{(2n-2)(1+t^2)^{n-1}}\right]_0^A - \frac{1}{2n-2}\int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$J_n = \frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}$$

3.

a) $J_3 = \frac{3}{4}J_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}J_1$

Or $J_1 = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1+t^2} = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \dfrac{dt}{1+t^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} \arctan A = \dfrac{\pi}{2}$

donc $J_3 = \frac{3\pi}{16}$.

b) Soient $0 < r < s < 1$. En posant $t = (\frac{1}{x}-1)^{\frac{1}{2}}$, il vient

$x = \frac{1}{1+t^2}$ et $dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt$

On a: $\displaystyle\int_s^r x\,(\frac{1}{x}-1)^{\frac{-1}{2}}\,dx = \int_{(\frac{1}{s}-1)^{\frac{1}{2}}}^{(\frac{1}{r}-1)^{\frac{1}{2}}} \frac{-2dt}{(1+t^2)^3}$

En faisant tendre r vers 1 et s vers 0, on obtient $I(\frac{-1}{2}) = 2J_3 = \frac{3\pi}{8}$.