MATHÉMATIQUES

Ce cas a été rédigé par l'ESC Grenoble.
DURÉE : 2 HEURES

CONSIGNES

Aucun document n'est autorisé.
Calculatrices autorisées.

Barème : 4 point pour l'exercice 1, 6 points pour l'exercice 2 et 10 points pour l'exercice 3.

SUJET

EXERCICE 1

Des relevés climatiques indiquent qu'en moyenne 2 des 30 jours du mois de juin sont pluvieux. On considère la pluie journalière comme une épreuve indépendante. On note X le nombre de jours pluvieux en juin.

1. Quelle est l'espérance de X ? Reconnaitre alors sa loi et donner sa variance.

2. Déterminer la probabilité d'avoir au moins un jour en juin où il ne pleut pas.

3. En utilisant l'approximation de Poisson, calculer la probabilité d'avoir au plus 3 jours pluvieux en juin.

EXERCICE 2

Soient la matrice de taille 3 à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité de taille 3.

1.a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) Déterminer une base de chaque sous-espace propre.

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. On veut retrouver la réponse à la question précédente.

a) Calculer $A^2 - 3A + 2I$.

b) En déduire que les valeurs propres de A sont les racines de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$.

c) Retrouver alors la réponse à la question 1c).

EXERCICE 3

On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha 2^n}$ converge.

On note S_α sa somme.

2. Déterminer S_1.

3. Soient $0 < a \leqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^a x^n \ln x \, dx$, puis démontr

$$\int_0^a x^n \ln x \, dx = \left(\ln(a) - \frac{1}{n+1}\right)\frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

4. On admet que pour tout $a \in]0,1]$, $\int_0^a \frac{\ln x}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a x^n \ln x \, dx$.

En déduire : d'une part la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$ et d'autre part que $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x} dx = -(\ln 2$

5.a) A l'aide d'un changement de variable et de la question 4, justifier l'existence de l'i
$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ et l'exprimer en fonction de S_2.

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\int^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -S_2$.