CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. L'espérance de X est égale à 2. Pour $i \in [1, n]$, la variable aléatoire $X_i = \begin{cases} 1 & \text{s'il pleut le i-ème jour,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ suit une loi binomiale de paramètres 1 et p. Les variables X_i sont indépendantes. On a $X = \sum_{i=1}^{30} X_i$ et X suit une loi binomiale de paramètres 30 et p. Or $2 = E(X) = 30p$ d'où $p = \frac{1}{15}$. Sa variance est $V(X) = np(1-p) = \frac{28}{15}$.

2. On veut $P(X \leqslant 29)$. Or $P(X \leqslant 29) = 1 - P(X = 30)$, donc $P(X \leqslant 29) = 1 - (\frac{1}{15})^{30}$.

3. On veut $P(X \leqslant 3)$. On a $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0,1$ et $np < 15$. On peut approcher la loi binomiale de X par une loi de Poisson de paramètre 2. On a alors $P(X \leqslant 3) = e^{-2}(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}) = \frac{19}{3}e^{-2}$ et $P(X \leqslant 30) \simeq 0,857$.

EXERCICE 2

1. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Le nombre 2 est valeur propre car la 3-ième colonne de A signifie que $Ae_3 = 2e_3$.
On a $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1, par le théorème du rang, l'espace propre $E_2(A)$ associé à la valeur propre 2 est de dimension 2. Il manque une seule valeur propre qui sera forcément simple.
On a $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. Alors $A - I$ n'est pas de rang 3 (ou encore $\det(A - I) = 0$) car $C_1 = -C_3$. Donc 1 est valeur propre de A. Les valeurs propres de A sont 1 et 2.

b) D'après le raisonnement fait en a), $\dim(E_2(A)) = 2$ et $e_3 \in E_2(A)$. Mais dans $A - 2I$, $C_1 = -C_2$, ainsi $e_1 + e_2 \in E_2(A)$. La famille $(e_1 + e_2, e_3)$ est libre dans $E_2(A)$ qui est de dimension 2, c'est donc une base de $E_2(A)$. On a aussi par a), $\dim(E_1(A)) = 1$ et $C_1 = -C_3$ dans $A - I$, entraine que $E_1(A)$ est engendré par $e_1 + e_3$.

c) La matrice A est diagonalisable car $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = \dim(\mathbb{R}^3)$.

2.a) On a $A^2 - 3A + 2I = 0$.

b) Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors $AX = \lambda X$ et
$(A^2 - 3A + 2I).X = A^2X - 3AX + 2X = \lambda^2 X - 3\lambda X + 2X = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)X$. Comme $A^2 - 3A + 2I = 0$ et $X \neq 0$, forcément λ est solution de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$. On vérifie comme en 1b) que 1 et 2 sont effectivement valeur propre de A.

c) On a pour tout $X \in \mathbb{R}^3$,
$X = (2I - A)X + (A - I)X$. Or $0 = A^2 - 3A + 2I = (I - A)(2I - A) = (2I - A)(I - A)$, donc $(2I - A)X \in E_1(A)$ et $(A - I)X \in E_2(A)$. D'où $E_1(A) + E_2(A) = \mathbb{R}^3$ et comme $1 \neq 2$, $E_1(A) \oplus E_2(A) = \mathbb{R}^3$, on retrouve alors que A est diagonalisable.

EXERCICE 3

1. Posons $a_n = \frac{1}{n^\alpha 2^n}$: c'est un terme général positif, et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}(\frac{n}{n+1})^\alpha$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. La règle de d'Alembert dit alors que la série de terme général a_n converge.

2. Par le deuxième rappel, $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln(1 - \frac{1}{2})$ et $S_1 = \ln(2)$.

3. Si $n = 0$, la fonction $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, a]$ car $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^a \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} [x\ln(x) - x]_\varepsilon^a$ existe et est finie.
Si $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto x^n \ln x$ est prolongeable par continuité en zéro donc elle est intégrable sur $]0, a]$.
Soient $n \in \mathbb{N}$, ε et a deux réels tels que $0 < \varepsilon < a \leqslant 1$. On intègre par parties :

$$\begin{aligned} &\int_\varepsilon^a x^n \ln x \, dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}\right]_\varepsilon^a - \frac{1}{n+1}\int_\varepsilon^a x^n \, dx\,, \\ &= \frac{a^{n+1}\ln a}{n+1} - \frac{\varepsilon^{n+1}\ln \varepsilon}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}(a^{n+1} - \varepsilon^{n+1}). \end{aligned}$$

On fait ensuite tendre ε vers zéro, pour obtenir

$$\int_0^a x^n \ln x \, dx = \left(\ln(a) - \frac{1}{n+1}\right) \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

4. Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x} dx$ existent car $\frac{\ln x}{1-x} \underset{0}{\sim} \ln x$ et $\frac{\ln x}{1-x} \underset{1}{\sim} 1$.
Si on évalue a en 1 ou $\frac{1}{2}$ dans la formule de la question 4, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n \ln x \, dx &= -\frac{1}{(n+1)^2}, \\ \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \ln x \, dx &= -\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\left(\ln 2 + \frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

En utilisant le résultat admis, on a alors : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n \ln x \, dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. Par un changement et le premier rappel, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$.
De même :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x} dx &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \ln x \, dx, \\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\left(\ln 2 + \frac{1}{n+1}\right), \\ &= -S_1 \ln 2 - S_2, \\ &= -(\ln 2)^2 - S_2.\end{aligned}$$

5.a) Le changement de variable affine $x = 1 - t$ donne $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$. La relation de Cha question précédente donnent alors $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\frac{\pi^2}{6} + (\ln 2)^2 + S_2$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Par une intégration par parties, $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = [\ln t \ln(1-t)]_\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{1-t} dt$. En faisant tend zéro et à l'aide de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt &= \left(\ln\frac{1}{2}\right)^2 + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{1-t} dt, \\ &= (\ln 2)^2 - (\ln 2)^2 - S_2, \\ &= -S_2.\end{aligned}$$

6. En comparant les résultats des questions 5a) et 5b), on a

$$S_2 = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

Corrigé

Passerelle 2

Mathématiques