CORRIGÉ

EXERCICE 1

1.a) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 576$ et $p = \frac{1}{2}$. Son espérance est $E(X) = np = 288$ et sa variance $V(X) = np(1-p) = 144$. Son écart type est $\sigma = 12$.

b) On peut approcher la loi de X par une loi normale.

2. La probabilité cherchée est $P(576 - 300 \leqslant X \leqslant 300)$, soit d'après a), $P\big(-1 \leqslant \frac{X-E(X)}{\sigma} \leqslant 1\big)$. Cette probabilité vaut $\phi(1) - \phi(-1)$ ou encore $2\phi(1) - 1$. Par le tableau, la probabilité demandée est égale à $\boxed{0,74}$.

3. On cherche N_m tel que $0,99 = P(576 - N_m \leqslant X \leqslant N_m) = 2\phi\big(\frac{N_m - E(X)}{\sigma}\big) - 1$. Par le tableau, on doit avoir $\frac{N_m - E(X)}{\sigma} = 2,55$. On obtient $\boxed{N_m = 319}$.

EXERCICE 2

1. Soit I_3 la matrice identité 3×3.

• Le nombre 1 est valeur propre de A_n car $A_n - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2. En effet, $C_1 + C_2 = C_3$ et les vecteurs C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires.

• Le nombre $1 + \frac{1}{n}$ est valeur propre de A_n car $A_n - (1 + \frac{1}{n})I_3 = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1. En effet, $C_1 = -C_2 = -C_3$ et le vecteur C_1 est non nul.

• Enfin, 1 et $1 + \frac{1}{n}$ sont les seules valeurs propres de A_n car $\mathrm{rg}(A_n - I_3) + \mathrm{rg}(A_n - (1 + \frac{1}{n})I_3) = 3$.

2. Notons E_1 (resp. $E_{1+\frac{1}{n}}$) l'espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. $1 + \frac{1}{n}$).

On a $E_1 = \mathrm{Ker}(A_n - I_3)$. D'après la question 1, $\mathrm{rg}(A_n - I_3) = 2$ et par le théorème du rang, $\dim E_1 = 1$. Comme $C_1 + C_2 = C_3$, E_1 est engendré par $e_1 + e_2 - e_3$.
On a $E_{1+\frac{1}{n}} = \mathrm{Ker}(A_n - (1 + \frac{1}{n})I_3)$. D'après la question 1, $\mathrm{rg}(A_n - (1 + \frac{1}{n})I_3) = 1$ et par le théorème du rang, $\dim E_{1+\frac{1}{n}} = 2$. Comme $C_1 = -C_2 = -C_3$, $E_{1+\frac{1}{n}}$ est engendré par $e_1 + e_2$ et $e_1 + e_3$.

3. La matrice A_n est diagonalisable car $\dim E_1 + \dim E_{1+\frac{1}{n}} = 3$.

4. D'après les questions précédentes, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $A_k = PD_kP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{k} \end{pmatrix}$.

On a $B_n = \prod_{k=1}^{n} PD_kP^{-1} = PD_nP^{-1}$ avec $D_n = \prod_{k=1}^{n} D_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) & 0 \\ 0 & 0 & \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) \end{pmatrix}$ qui est diagonale. Donc B_n est diagonalisable. Or, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1$.
1

D'où $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & 0 \\ 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $X > 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^2}{(1+t^4)^n}$ est définie et continue sur $[0; X]$.
Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{t^2}{(1+t^4)^n} \sim \dfrac{t^2}{t^{4n}}$, soit $\dfrac{t^2}{(1+t^4)^n} \sim \dfrac{1}{t^{4n-2}}$. Or $n \geqslant 1$, d'où $4n-2 \geqslant 2$ et l'intégrale définissant u_n converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $t \longmapsto \dfrac{t^3}{(1+t^4)^{n+1}}$ est la fonction $t \longmapsto -\dfrac{1}{4n(1+t^4)^n}$.

b) Après calculs, $u_n - u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^{n+1}} dt$. On obtient le résultat par intégration par parties en posant pour tout $t \geqslant 0$, $u(t) = t^3$ et $v'(t) = \dfrac{t^3}{(1+t^4)^{n+1}}$, puis en utilisant a).

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la question précédente, $\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{4(n+1)-3}{4(n+1)}$. On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = 1$ et par le critère de d'Alembert $\boxed{R = 1}$.

4. Soit $x \in]-1, 1[$. On a $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n u_{n+1} x^{n-1}$, et :

$$\begin{aligned} 4(1-x)S'(x) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 4nu_{n+1} x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} 4nu_{n+1} x^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 4nu_{n+1} x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} 4(n-1)u_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (4nu_{n+1} - 4(n-1)u_n - u_n) x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (4nu_{n+1} - (4n-3)u_n) x^{n-1} \\ &= 0 \quad \text{par la question 2b.} \end{aligned}$$

5. Sur $]-1, 1[$, l'équation différentielle (E) équivaut à $y' = \dfrac{1}{4(1-x)} y$. La solution générale de cette équation différentielle est $y : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt[4]{1-x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. D'après la question 4, S est solution de (E) sur $]-1, 1[$. Comme $S(0) = u_1$, on a :

$$\forall\, x \in]-1, 1[\quad \boxed{S(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{1-x}}}.$$