MATHÉMATIQUES

Programme, conseils, bibliographie

PUBLIC CONCERNÉ

Tout public possédant les connaissances généralement enseignées dans un cours de mathématiques de 2e et de 3e cycle scientifique, économique ou commercial, à l'université ou en classes préparatoires.

NATURE DE L'ÉPREUVE

L'épreuve de mathématiques d'admissibilité en 2e année a pour but de tester la bonne assimilation du programme par les candidats, leur capacité de raisonnement et leur aptitude à rédiger et expliquer.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants portant sur l'analyse, l'algèbre linéaire et les probabilités-statistiques, conçus, sans grande difficulté théorique, de telle sorte qu'un candidat sérieusement préparé soit en mesure d'aborder l'ensemble des questions.

PROGRAMME

Algèbre

Réduction des endomorphismes, diagonalisation et trigonalisation, systèmes récurrents et différentiels, dualité, formes bilinéaires et quadratiques, orthogonalisation de Schmidt, formes hermitiennes et endomorphismes unitaires, produit mixte et produit vectoriel.

Analyse

Espaces métriques, espaces vectoriels normés, topologie de la convergence uniforme, fonction de la variable réelle, formule de Taylor, intégrale des fonctions réglées et critères de convergence, intégrale paramétrique et dérivabilité, critère de convergence des séries, série de fonction et séries entières, fonction de plusieurs variables, différentiabilité des applications partielles, théorème de Schwartz et recherche d'extrémum local, les multiplicateurs de Lagrange, les équations différentielles du premier et second ordre, géométrie différentielle, études des courbes et des arcs paramétrés, courbes tracées sur une surface, intégrales multiples : aires et volumes.

Statistique

Les variables aléatoires continues, espérance mathématique et variance, les principales lois statistiques, théorie de l'estimation, méthodes de tests d'hypothèses.

CONSEILS DE PRÉPARATION

Pour une préparation efficace

Une bonne assimilation du cours est indispensable. Il faut donc consacrer assez de temps pour bien connaître les principales définitions, les théorèmes de base et les propriétés courantes. Il faut faire beaucoup d'exercices. Pour pouvoir contrôler ses résultats, il vaut mieux utiliser des livres d'exercices corrigés. Mais il ne faut pas consulter la solution sans avoir fait l'effort de chercher. Il est aussi conseillé de faire les sujets des années précédentes.

Il faut apprendre à rédiger proprement : justifier ses réponses et ne pas citer la conclusion d'un théorème sans vérifier les hypothèses.

Le jour du concours

Bien lire le sujet pour en comprendre la teneur et saisir l'enchaînement des questions.

Chercher au brouillon avant d'écrire au propre une solution claire et concise.

En cas de blocage sur une question, on doit prendre le temps de relire et de faire la synthèse de tous les résultats obtenus depuis le début, la réponse à la question posée est souvent une application immédiate de l'un de ces résultats.

Écrire lisiblement et encadrer les résultats obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

- F. Liret, D. Martinais, *Cours de mathématiques. Analyse 2e année*, éd. Dunod.
- R. Dupont, J.-P. Fleury, *Analyse, exercices avec solutions. Prépas écoles de commerce*, éd. Vuibert.
- C. Boy, A. Nizard, *Analyse mathématique, exercices et corrigés. Prépas économie*, éd. Armand Colin.
- F. Liret, D. Martinais, *Mathématiques pour le Deug : algèbre et géométrie 2e année*, éd. Dunod.
- R. Dupont, *Algèbre linéaire, rappels de cours et exercices. Classes préparatoires,* éd. Vuibert.
- A. Denmat, F. Héaulme, *Algèbre linéaire, série T. D.*, éd. Dunod.
- C. Lebœuf et al., *Cours de probabilités et de statistiques*, éd. Marketing.
- A. Combrouze, *Probabilités 1 et 2. HEC, option scientifique*, éd. PUF, coll. « Major ».
- F. Dress, *Probabilités et statistiques, Deug sciences*, éd. Dunod.
- TranVan Hiep, *Morceaux choisis de l'oral de mathématiques*, éd. PUF, coll. « Major ».
- Tran Van Hiep, *Mathématiques formulaire*, éd. PUF, coll. « Major ».

MATHÉMATIQUES

Ce cas a été rédigé par l'ESC Grenoble.

Durée : 2 heures.

CONSIGNES

Aucun document n'est autorisé. Calculatrices autorisées.
Barème : exercice 1 : 6 points ; exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 8 points.

SUJET

EXERCICE 1

On a observé qu'une proportion $0,002$ des machines d'un type donné tombaient en panne par mois d'utilisation.
Une entreprise décide d'acquérir 2600 machines de ce type.

1. Quelle est la loi de probabilité du nombre mensuel de pannes X que l'on peut prévoir?

2. Calculer $P(X > 10)$.

3. Déterminer le nombre N minimum tel que $P(X \leq N) \geq 0,99$.

EXERCICE 2

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ l'endomorphisme f_t dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) est :

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix},$$

où t est un nombre réel.

1. Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est un vecteur propre de f_t.

2. Déterminer le rang de f_t. En déduire que 0 est une valeur propre de f_t et donner la dimension du sous-espace propre correspondant.

3. Pour quelles valeurs de t, l'endomorphisme f_t est-il diagonalisable?

EXERCICE 3

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite.
Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$.

On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la relation de récurrence: $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \dfrac{1}{n^\alpha u_1}$. En déduire que si $\alpha > 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

(b) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n \geq \dfrac{1}{n^\alpha M}$.

En déduire que $\alpha > 1$.