

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. La loi de X est la loi binomiale de paramètres $n = 2600$ et $p = 0,002$.
2. Comme n est grand ($n > 30$), p petit et $np = 5,2 < 10$, la loi de X est voisine de la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 5,2$. On a alors

$$P(X > 10) \simeq 1 - e^{-5,2} \sum_{k=0}^{10} \frac{(5,2)^k}{k!} \simeq 0,018$$

3. Nous avons $P(X > 11) \simeq 0,007$ et $P(X > 10) \simeq 0,018$. D'où $N = 11$.

EXERCICE 2

1. Un calcul simple donne: $f_t(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = (t+3)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, donc $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est un vecteur propre de f_t associé à la valeur propre $t+3$.

2. L'image de f_t est engendrée par $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ donc $\text{rg } f_t = 1$. 0 est donc valeur propre de f_t . Le sous-espace propre E_0 associé à 0 est $\ker f_t$ et sa dimension est $4 - \text{rg } f_t = 3$.

3.

1^{er} cas: $t+3=0$ i.e. $t=-3$:

0 est valeur propre de f_t de multiplicité au moins égale à 3.

La somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité est égale à la trace de $A_{-3} = 0$.

0 est donc la seule valeur propre de f_t et comme f_t n'est pas nul, f_t n'est pas diagonalisable.

2^d cas: $t \neq -3$:

On sait que : $E_0 + E_{t+3}$ est directe (la somme de deux sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes est directe).

On a donc $\dim(E_0 \oplus E_{t+3}) = \dim E_0 + \dim E_{t+3} \leq 4$, d'où $\dim E_{t+3} \leq 1$, or $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \in E_{t+3}$ donc nécessairement $\dim E_{t+3} = 1$.

Ainsi, $\dim(E_0 \oplus E_{t+3}) = \dim \mathbb{R}^4$.

Par suite, $E_0 + E_{t+3} = \mathbb{R}^4$ et f_t est diagonalisable.

Conclusion: f_t est diagonalisable si et seulement si $t \neq -3$.

EXERCICE 3

1. Soit $N \geq 1$, on a par télescope

$$\sum_{n=1}^N u_{n+1} - u_n = u_{N+1} - u_1.$$

Il s'ensuit donc que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

2.(a) Il est clair, par une récurrence immédiate, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et que $u_n > 0$. On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

On a donc pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n^\alpha u_1}$.

Si $\alpha > 1$ alors la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge d'où la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant positive et convergente, elle est majorée par un nombre $M > 0$. On a donc pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{n^\alpha M} \geq 0$.

Or, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge car la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Par comparaison des séries à termes positifs, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge aussi et donc $\alpha > 1$.