MATHÉMATIQUES

Sur la Learning Box, sont disponibles : le public concerné par l'épreuve, la méthode, le programme de révision, la bibliographie et les annales des concours précédents. Accès via votre espace candidat sur www.passerelle-esc.com

DURÉE : 2 HEURES

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}$.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ est $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par: $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n$.

Le but de cet exercice est de déterminer une expression de X_n en fonction de n.

1. Calculer X_2.

2.a) Déterminer le rang des matrices A, $A - I$ et $A + 4I$.

b) En déduire que les sous-espaces $E = \{X \in \mathbb{R}^3; AX = 0\}$, $F = \{X \in \mathbb{R}^3; AX = X\}$ et $G = \{X \in \mathbb{R}^3; AX = -4X\}$ sont tous de dimension 1.

c) Déterminer $\vec{u}$ un vecteur qui engendre E, $\vec{v}$ un vecteur qui engendre F et $\vec{w}$ un vecteur qui engendre G.

d) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à cette nouvelle base $\mathcal{B}$.

Dans la suite de l'exercice, il n'est pas nécessaire de calculer P^{-1}.

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, notée D. Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$, notée Δ. Ecrire une relation matricielle entre A et D, puis une entre B et Δ.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $Y_0 = -\vec{v} + 2\vec{w}$ et $Y_1 = -\vec{u} - 3\vec{v} + 4\vec{w}$.

b) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n \iff Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

c) Montrer que: $\forall n \geqslant 0$, $x_n = ((-1)^n - 1)2^{n-2}$, $\forall n \geqslant 1$, $y_n = -3$ et $\forall n \geqslant 0$, $z_n = (-1)^n(1 - 2n)2^{n+1}$.

5. Déterminer une expression de X_n en fonction de n.

Exercice 2

1. Déterminer le domaine de définition et la dérivée sur ce domaine de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

2. Déterminer la solution y de l'équation différentielle $(1 + e^x)y' + e^x y = 1$ vérifiant $y(\ln(2)) = \dfrac{1}{3}$.
On pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-f(x)}$.

Vous traiterez au choix l'exercice 3 ou l'exercice 4.

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux manières la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{(n+1)(x^{n+1} - x^n) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une boite contient 2 boules portant le numéro 0 et pour tout entier k compris entre 1 et n, 2^k boules portant le numéro k.

2. Justifier que la boite contient 2^{n+1} boules.

3. On tire une boule de cette boite et on note X la variable aléatoire associée au numéro obtenu.

a) Donner la loi de X.

b) Déterminer l'espérance $E(X)$ de X. Donner un équivalent de $E(X)$ lorsque $n \to +\infty$.

4. On tire une à une avec remise deux boules de la boite et on appelle Y la variable aléatoire associée au plus grand des numéros obtenus sur les deux tirages.

a) Déterminer la probabilité $P(Y = 0)$, puis pour tout $k \geqslant 1$, $P(Y \leqslant k)$.

b) En déduire la loi de Y.

c) Déterminer l'espérance $E(Y)$ de Y. Donner un équivalent de $E(Y)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ et pour $x \in]0,1[$, $I_x = \displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ et $J_x = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$.

1. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 en 1 de la fonction $t \mapsto \ln(t)$.

2. Justifier l'existence de I et de I_x pour tout $x \in]0,1[$.

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1} J_x = \ln(2)$.

4. Soit $x \in]0,1[$. Justifier que $I_x = \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{\ln(t^2)}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

5. En déduire que $\lim\limits_{x\to 1}(I_x - J_x) = 0$, puis déterminer la valeur de I.

Barème: Exercice 1=10 pts ; exercice 2=4 pts ; exercice 3=6 pts ; exercice 4=6 pts.