MATHÉMATIQUES

Programme, conseils, bibliographie

Public concerné

Tout candidat bachelier ayant suivi deux années universitaires (Licence 2 Sciences, Licence 2 Économie...) ou de niveau équivalent (BTS, IUT, classes préparatoires Math Spé...).

Nature de l'épreuve

Première partie

L'épreuve de mathématiques du concours Passerelle 1 a pour but de tester la bonne assimilation du programme par les candidats, leur capacité de raisonnement et leur aptitude à rédiger et expliquer.

Deuxième partie

Le sujet est composé de trois exercices indépendants portant sur l'algèbre linéaire, l'analyse et les probabilités-statistiques, conçus, sans grande difficulté théorique, de telle sorte qu'un candidat sérieusement préparé soit en mesure d'aborder l'ensemble des questions.

Programme

A) Algèbre linéaire

a) Espaces vectoriels de dimension finie :
- vecteurs de IRn : opérations internes et externes sur IRn (généralisation à partir de n = 2 et n = 3) ;
- structure d'espace vectoriel ;
- dépendance et indépendance linéaires ;
- vecteurs générateurs ;
- base d'un espace vectoriel : définition.

b) Matrices :
- définition (tableau de nombres) ;
- addition, multiplication par un scalaire, multiplication de deux matrices ;
- calcul de l'inverse d'une matrice carrée et application à l'équation matricielle AX = B.

c) Applications linéaires en dimension finie :
- rang d'une application linéaire, formule reliant le rang, la dimension du noyau et celle de l'espace de départ ;
- image par une application linéaire d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.

B) Analyse

a) Suites

b) Fonctions numériques :

- fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances ;
- limites, asymptotes ;
- dérivation ;
- primitives d'une fonction continue sur un intervalle ;
- maxima et minima d'une fonction ;
- représentation graphique.

c) Calcul intégral :

- intégrale d'une fonction continue sur un segment ;
- propriétés de l'intégrale ;
- intégration par parties.

C) Statistiques et probabilités

a) Définition d'une probabilité et propriétés ;

b) Événements indépendants et dépendants relativement à une probabilité ;

c) Variable aléatoire (ou aléa numérique) prenant un nombre fini de valeurs réelles ;

d) Distribution (ou loi) de probabilité ;

e) Fonction de répartition ;

f) Espérance mathématique, variance, écart type ;

g) Distributions usuelles de probabilité ;

h) Distribution de Bernouilli, binomiale ;

i) Distribution de Poisson : approximation de la distribution binomiale par la loi de Poisson ;

j) Distribution normale.

Conseils de préparation

Après avoir bien lu le programme, le candidat doit noter les points inconnus ou trop flous.

Il doit avant tout revoir le cours pour consolider ou apprendre les différentes notions définies dans le programme, ainsi que les résultats (théorèmes et leurs corollaires...) qui en découlent. À chaque notion acquise, le candidat doit tester son degré d'assimilation en faisant de petits exercices.

Les différentes notions du programme étant acquises, le candidat doit faire beaucoup d'exercices et d'annales (en particulier du concours Passerelle 1) sans surtout se précipiter sur la correction.

Bibliographie

- Jean-Marie Monier, *Cours et Exercices, collection* « J'intègre », éd. Dunod.
- Simon et Blume, *Mathématiques pour économistes*, éd. Économica.
- *Recueil d'exercices et résumés de cours*, coll. « Flash U », éd. Armand Collin.
- Tout livre d'analyse et d'algèbre linéaire de 1er cycle universitaire (1re année).

MATHÉMATIQUES

▸ DURÉE : 2 HEURES

Exercice 1

Soit f la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x^3-3x^2}$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on ait

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-3}.$$

3. Donner une primitive de f sur l'intervalle $]3, +\infty[$.

4. En déduire les solutions de l'équation différentielle : $y' - f(x)y = 0$ sur $]3, +\infty[$.

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 5 & 10 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} -14 & -18 & 8 \\ 23 & 21 & 18 \\ -8 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

1. Donner le rang de A.

2. Calculer AB et en déduire que $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$.

3. a) B est-elle inversible?

b) Calculer le rang de B. En déduire que $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β et γ pour que le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -14\,x - 18\,y + 8\,z & = & \alpha \\ 23\,x + 21\,y + 18\,z & = & \beta \\ -8\,x - 6\,y - 11\,z & = & \gamma \end{array} \right.$$

ait au moins une solution.

Exercice 3

Jean et Martine disposent d'une urne contenant 6 boules dont 3 sont blanches et les autres noires, et d'un dé parfaitement équilibré.

Jean extrait simultanément deux boules de l'urne. Martine lance deux fois de suite le dé. Les deux épreuves sont indépendantes.

1. a) Quelle est la probabilité que Jean tire deux boules blanches.

b) Quelle est la probabilité que Martine obtienne deux nombres dont le produit est supérieur à 13 ?

2. Jean et Martine conviennent de jouer de la manière suivante:

Jean extrait deux boules de l'urne. S'il obtient deux boules blanches, il gagne et la partie cesse.

Dans tous les autres cas, Martine lance deux fois le dé. Si elle obtient deux nombres dont le produit est supérieur à 13, elle gagne et le jeu cesse.

Dans le cas contraire, le tour revient à Jean dans les conditions identiques à son premier essai, les boules tirées à chaque essai étant remises à l'urne.

Calculer la probabilité pour que Jean gagne à son deuxième essai.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\sin x$.

1. On pose $g(x) = x - f(x)$. Etudier les variations de la fonction g. En déduire qu'il existe un unique point α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

2. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\, f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}$$

3. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\, x_n - \alpha| \leq \frac{|\alpha|}{2^n}$$

b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Barème :

7 pts pour l'exercice 1; 7 pts pour l'exercice 2; 6 pts pour l'exercice 3; 6 pts pour l'exercice 4