CORRIGÉ

Exercice 1

Soit φ l'application définie sur E par : $\forall P \in E,\ \varphi(P)\ : x \mapsto P'(x+1) + P'(x-1) - P'(x)$.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, P et Q dans E. On a $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$ et pour tout $(x, a) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda P + Q)'(x + a) = \lambda P'(x + a) + Q'(x + a)$. Ainsi $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$ et φ est linéaire. Pour $P \in E$, $\deg(P') \leqslant \deg(P)$, donc $\varphi : E \to E$. Ainsi, φ est un endomorphisme de E.

2. On a $e_0 : x \mapsto 1$ et $\varphi(e_0) = 0$ car la dérivée de e_0 est nulle. Pour $k \geqslant 1$, on a :

$$\varphi(e_k)(x) = k(x+1)^{k-1} + k(x-1)^{k-1} - kx^{k-1}$$

D'où :

$$\varphi(e_1) = 1 \quad \varphi(e_2) = 2e_1 \quad \varphi(e_3) = 6e_0 + 3e_2 \quad \varphi(e_4) = 24e_1 + 4e_3$$

et la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$ est bien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. L'image de φ est engendré par les colonnes de A. Le rang de φ, soit le rang de A est égal au rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ extraite de A qui est égal à 4 (matrice triangulaire de taille 4 et de coefficients diagonaux non nuls).
Par le théorème du rang, La dimension du noyau de φ est $5 - 4$ soit égal à 1.

On a $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(e_0), \varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$ qui est égal à $\mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$ car $\varphi(e_0) = 0$. Par la question 2, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)) \subset \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$. Or $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$ ont même dimension, par conséquent $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$.

On a $\varphi(e_0) = 0$ donc $e_0 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(e_0) = \mathbb{R}$.

4. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ ne sont pas supplémentaires dans E car $e_0 \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$ et donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) \neq \{0\}$.

5. Si on note $Q : x \mapsto -5x + 9x^2 + x^3 - x^4$, par le calcul direct ou bien en multipliant A par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 9 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on vérifie que $\varphi(Q)(x) = 1 - 6x + 3x^2 - 4x^3$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha) = 0$. Donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme φ envoie la fonction $x \mapsto \alpha - 5x + 9x^2 + x^3 - x^4$ sur la fonction $x \mapsto 1 - 6x + 3x^2 - 4x^3$.

Réciproquement, si P vérifie l'équation $P'(x+1) + P'(x-1) - P'(x) = 1 - 6x + 3x^2 - 4x^3$, alors $\varphi(P) = \varphi(Q)$ et par linéarité $\varphi(P - Q) = 0$ et $P - Q \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Par la question 3, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P - Q = \alpha$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \alpha - 5x + 9x^2 + x^3 - x^4$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$.

1. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Si F est la primitive s'annulant en 0 de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, alors par le théorème fondamental du calcul intégral, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$. Par la relation de Chasles, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}} = F(x^2) - F(x)$.

b) La fonction F est dérivable (car c'est une primitive). D'après 1a), la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions dérivables. On a, sachant que $F' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^4+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

c) Par la question précédente, $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^4+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 2x(1+x^4)^\alpha - (1+x^2)^\alpha$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. En utilisant le développement limité indiqué, on a :

$$f'(x) = 2x(1+\alpha x^4 + \mathrm{o}(x^4)) - (1+\alpha x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^4 + \mathrm{o}(x^4)) = -1 + 2x - \alpha x^2 + \mathrm{o}(x^3) = -1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)$$

et en intégrant, on obtient développement limité de f en 0 à l'ordre 4, $f(x) = f(0) - x + x^2 + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$ soit,

$$f(x) = -x + x^2 + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$$

2. a) La dérivée de la fonction $t \mapsto \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ est $\dfrac{1 + \dfrac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t + \sqrt{t^2+1}}$, soit $\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}(t+\sqrt{t^2+1})}$ qui vaut $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

b) On a donc par a), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left[\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\right]_x^{x^2} = \ln\left(\dfrac{x^2 + \sqrt{x^4+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}\right)$. D'où $f = g$. Par la question 1b), la fonction f est de classe C^∞ et par la formule de formule de Taylor-Young, on a au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^4)$$

Par unicité, on identifie avec le développement limité trouvé en 1c), pour obtenir :

$$g(0) = f(0) = 0 \quad ; \quad g'(0) = f'(0) = -1 \quad ; \quad g''(0) = f''(0) = 2 \quad ; \quad g^{(3)}(0) = f^{(3)}(0) = 1 \quad ; \quad g^{(4)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$$

Exercice 3

Pour deux évènements A et B, on notera $P_A(B)$ la probabilité de B sachant A et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

1. On a $p_1 = \dfrac{1}{2}$, $q_1 = P(B_1) = P_{A_1}(B_1)P(A_1) + P_{\bar{A}_1}(B_1)P(\bar{A}_1)$ en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(A_1, \bar{A}_1)$. D'où, $q_1 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2}$ et $q_1 = \dfrac{4}{15}$.
On obtient de même :
$p_2 = P(A_2) = P_{A_1}(A_2)P(A_1) + P_{\bar{A}_1}(A_2)P(\bar{A}_1) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{2}$ et $p_2 = \dfrac{17}{30}$.
$q_2 = P(B_2) = P_{A_2}(B_2)P(A_2) + P_{\bar{A}_2}(B_2)P(\bar{A}_2) = \dfrac{1}{3}p_2 + \dfrac{1}{5}(1-p_2)$ et $q_2 = \dfrac{62}{225}$.

2. Soit $n \in \{2, \ldots, N\}$. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(A_n, \bar{A}_{n-1})$. On a $P(A_n) = P_{A_{n-1}}(A_n)P(A_{n-1}) + P_{\bar{A}_{n-1}}(A_n)P(\bar{A}_{n-1})$. Or $P_{A_{n-1}}(A_n) = \dfrac{1}{3}$ c'est la probabilité de tirer une blanche de l'urne U_1 et $P_{\bar{A}_{n-1}}(A_n) = \dfrac{4}{5}$, c'est la probabilité de tirer une noire de l'urne U_2, car on change d'urne. Ainsi,

$$p_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{4}{5}(1 - p_{n-1}) = -\frac{7}{15}p_{n-1} + \frac{4}{5}$$

3. Le nombre ℓ vérifie $\ell = a\ell + b$ et $\ell = \dfrac{6}{11}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \ell$. Alors :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \ell = ap_n + b - (a\ell + b) = a(p_n - \ell)$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien géométrique de raison a.

4. Par la question 3, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $p_n - \ell = a^{n-1}(p_1 - \ell)$. D'où :

$$p_n = -\frac{1}{22}\left(-\frac{7}{15}\right)^{n-1} + \frac{6}{11}$$

Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $q_n = P_{A_n}(B_n)P(A_n) + P_{\bar{A}_n}(\bar{B}_n)P(\bar{A}_n)$. D'où :

$$q_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n) = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5} = -\frac{1}{165}\left(-\frac{7}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}$$

Exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.a) et b). On a $(A-2I)^2 = 0$. Le polynôme $(X-2)^2$ annule A, il admet que le nombre 2 comme racine. Donc 2 est la seule valeur propre possible de A. Comme $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car sa première et troisième colonnes sont égales, le nombre 2 est la seule valeur propre de A.

c) On a $(A-2I)^2 = 0$, d'où en développant, $A^2 - 4A = -4I$ et alors $I = A \times \left(\frac{1}{4}(4I - A)\right) = \left(\frac{1}{4}(4I-A)\right) \times A$. La matrice A est bien inversible son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(4I - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. la matrice A n'est pas diagonalisable car sinon elle serait semblable à $2I$ donc égale à $2I$, ce qui est faux.
Le nombre 2 étant la seule racine du polynôme caractéristique χ_A de A, on a $\chi_A(X) = (-1)^4(X-2)^4$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$. La matrice A est trigonalisable.

3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Pour que A soit semblable à B, il faut qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ avec $A\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$, $A\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$, $A\varepsilon_3 = 2\varepsilon_3$ et $A\varepsilon_4 = \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4$.

Le rang de la matrice $A - 2I$ est 2, par le théorème du rang, l'espace propre associé à 2 est de dimension 2, il admet comme base $(e_1 - e_3, e_2 + e_4)$. On prend alors $\varepsilon_1 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = e_2 + e_4$. Pour trouver les vecteurs ε_2 et ε_4, on résout deux systèmes, ou on remarque que $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}e_1$ et $\varepsilon_4 = \frac{1}{2}e_4$ conviennent.

On vérifie que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (calcul d'un déterminant, du rang ou directement montrer qu'elle est libre). Donc A est semblable à B.