MATHÉMATIQUES

Programme, conseils, bibliographie

PUBLIC CONCERNÉ

Tout candidat bachelier ayant suivi deux années universitaires (Licence 2 Sciences, Licence 2 Économie...) ou de niveau équivalent (BTS, IUT, classes préparatoires Math Spé...).

NATURE DE L'ÉPREUVE

Première partie
L'épreuve de mathématiques du concours Passerelle 1 a pour but de tester la bonne assimilation du programme par les candidats, leur capacité de raisonnement et leur aptitude à rédiger et expliquer.

DEUXIÈME PARTIE

Le sujet est composé de trois exercices indépendants portant sur l'algèbre linéaire, l'analyse et les probabilités-statistiques, conçus, sans grande difficulté théorique, de telle sorte qu'un candidat sérieusement préparé soit en mesure d'aborder l'ensemble des questions.

PROGRAMME

A) Algèbre linéaire

a) Espaces vectoriels de dimension finie :

- vecteurs de IRn : opérations internes et externes sur IRn (généralisation à partir de n = 2 et n = 3) ;
- structure d'espace vectoriel ;
- dépendance et indépendance linéaires ;
- vecteurs générateurs ;
- base d'un espace vectoriel : définition.

b) Matrices :

- définition (tableau de nombres) ;
- addition, multiplication par un scalaire, multiplication de deux matrices ;
- calcul de l'inverse d'une matrice carrée et application à l'équation matricielle AX = B.

c) Applications linéaires en dimension finie :

- rang d'une application linéaire, formule reliant le rang, la dimension du noyau et celle de l'espace de départ ;
- image par une application linéaire d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.

B) Analyse

a) Suites

b) Fonctions numériques :

- fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances ;
- limites, asymptotes ;
- dérivation ;
- primitives d'une fonction continue sur un intervalle ;
- maxima et minima d'une fonction ;
- représentation graphique.

c) Calcul intégral :
- intégrale d'une fonction continue sur un segment ;
- propriétés de l'intégrale ;
- intégration par parties.

C) Statistiques et probabilités
a) Définition d'une probabilité et propriétés ;
b) Événements indépendants et dépendants relativement à une probabilité ;
c) Variable aléatoire (ou aléa numérique) prenant un nombre fini de valeurs réelles ;
d) Distribution (ou loi) de probabilité ;
e) Fonction de répartition ;
f) Espérance mathématique, variance, écart type ;
g) Distributions usuelles de probabilité ;
h) Distribution de Bernouilli, binomiale ;
i) Distribution de Poisson : approximation de la distribution binomiale par la loi de Poisson ;
j) Distribution normale.

Conseils de préparation

Après avoir bien lu le programme, le candidat doit noter les points inconnus ou trop flous.
Il doit avant tout revoir le cours pour consolider ou apprendre les différentes notions définies dans le programme, ainsi que les résultats (théorèmes et leurs corollaires...) qui en découlent. À chaque notion acquise, le candidat doit tester son degré d'assimilation en faisant de petits exercices.
Les différentes notions du programme étant acquises, le candidat doit faire beaucoup d'exercices et d'annales (en particulier du concours Passerelle 1) sans surtout se précipiter sur la correction.

Bibliographie

- Jean-Marie Monier, *Cours et Exercices*, collection « J'intègre », éd. Dunod.
- Simon et Blume, *Mathématiques pour économistes*, éd. Économica.
- *Recueil d'exercices et résumés de cours*, coll. « Flash U », éd. Armand Collin.
- Tout livre d'analyse et d'algèbre linéaire de 1er cycle universitaire (1re année).

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 HEURES.

CONSIGNES

Aucun document n'est autorisé.
Calculatrices interdites.

TRAITEZ OBLIGATOIREMENT TROIS EXERCICES :
Le candidat précisera en début de copie son choix entre l'exercice 3 et l'exercice 4.
- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3 ou 4

SUJET

Exercice 1

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \int_0^1 \sqrt{1-t^n}\,dt$.

1. Calculer I_1 et I_2 (pour calculer I_2, on pourra effectuer le changement de variable $t = \sin x$).

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, comparer t^n et t^{n+1}. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \leq I_{n+1} \leq 1$$

La suite (I_n) est-elle convergente?

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1], 1 - t^n \leq \sqrt{1-t^n} \leq 1 - \dfrac{t^n}{2}$

4. En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f^n la composée n-fois de l'endomorphisme f.

1. Calculer A^2 et A^3.

2. Montrer que $B' = \{e_1, f(e_1), f^2(e_1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Ecrire les matrices de f et de f^2 dans la base B'.

4. Déterminer les réels α, β, γ tels que $e_2 = \alpha e_1 + \beta f(e_1) + \gamma f^2(e_1)$.

5. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f \circ g = g \circ f$ et $g(e_1) = e_2$.

a) Donner la matrice de g dans la base B'.

b) En déduire que g est une combinaison linéaire de $id_{\mathbb{R}^3}$, f et f^2 (où $id_{\mathbb{R}^3}$ désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$).

c) Déterminer la matrice de g dans la base B.

Vous traiterez **au choix** l'exercice 3 ou l'exercice 4.

Exercice 3

Dans une urne contenant 9 jetons numérotés de 1 à 9, on effectue 9 tirages d'un jeton avec remise. Soit X le nombre de jetons tirés portant un numéro pair.

1. Déterminer la loi de X et donner son espérance.

2. On définit une variable aléatoire Y de la façon suivante:

• Si $X = 0$, on tire un jeton au hasard dans l'urne et Y prend, alors, la valeur du numéro de ce jeton.

• Si $X = k$, avec $k > 0$, on pose $Y = k$.

Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout réel x, $e^x \geq 1+x$. En déduire que pour tout réel, $x \in]0,1[$, $1+x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

2. En déduire que pour tout réel $y > 1$, $\ln \dfrac{y+1}{y} \leq \dfrac{1}{y} \leq \ln \dfrac{y}{y-1}$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par:

$$u_n = \sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}$$

4. Que peut-on en déduire pour la série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n}$?

Barème :

7 pts pour l'exercice 1; 8 pts pour l'exercice 2; 5 pts pour l'exercice 3; 5 pts pour l'exercice 4.