MATHÉMATIQUES

Programme, conseils, bibliographie

Public concerné

Tout candidat bachelier ayant suivi deux années universitaires (Licence 2 Sciences, Licence 2 Économie...) ou de niveau équivalent (BTS, IUT, classes préparatoires Math Spé...).

Nature de l'épreuve

Première partie

L'épreuve de mathématiques du concours Passerelle 1 a pour but de tester la bonne assimilation du programme par les candidats, leur capacité de raisonnement et leur aptitude à rédiger et expliquer.

Deuxième partie

Le sujet est composé de trois exercices indépendants portant sur l'algèbre linéaire, l'analyse et les probabilités-statistiques, conçus, sans grande difficulté théorique, de telle sorte qu'un candidat sérieusement préparé soit en mesure d'aborder l'ensemble des questions.

Programme

A) Algèbre linéaire

a) Espaces vectoriels de dimension finie :

- vecteurs de IRn : opérations internes et externes sur IRn (généralisation à partir de n = 2 et n = 3) ;
- structure d'espace vectoriel ;
- dépendance et indépendance linéaires ;
- vecteurs générateurs ;
- base d'un espace vectoriel : définition.

b) Matrices :

- définition (tableau de nombres) ;
- addition, multiplication par un scalaire, multiplication de deux matrices ;
- calcul de l'inverse d'une matrice carrée et application à l'équation matricielle AX = B.

c) Applications linéaires en dimension finie :

- rang d'une application linéaire, formule reliant le rang, la dimension du noyau et celle de l'espace de départ ;
- image par une application linéaire d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.

B) Analyse

a) Suites

b) Fonctions numériques :

- fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances ;
- limites, asymptotes ;
- dérivation ;
- primitives d'une fonction continue sur un intervalle ;
- maxima et minima d'une fonction ;
- représentation graphique.

c) Calcul intégral :
- intégrale d'une fonction continue sur un segment ;
- propriétés de l'intégrale ;
- intégration par parties.

C) Statistiques et probabilités

a) Définition d'une probabilité et propriétés ;
b) Événements indépendants et dépendants relativement à une probabilité ;
c) Variable aléatoire (ou aléa numérique) prenant un nombre fini de valeurs réelles ;
d) Distribution (ou loi) de probabilité ;
e) Fonction de répartition ;
f) Espérance mathématique, variance, écart type ;
g) Distributions usuelles de probabilité ;
h) Distribution de Bernouilli, binomiale ;
i) Distribution de Poisson : approximation de la distribution binomiale par la loi de Poisson ;
j) Distribution normale.

Conseils de préparation

Après avoir bien lu le programme, le candidat doit noter les points inconnus ou trop flous.
Il doit avant tout revoir le cours pour consolider ou apprendre les différentes notions définies dans le programme, ainsi que les résultats (théorèmes et leurs corollaires...) qui en découlent. À chaque notion acquise, le candidat doit tester son degré d'assimilation en faisant de petits exercices.
Les différentes notions du programme étant acquises, le candidat doit faire beaucoup d'exercices et d'annales (en particulier du concours Passerelle 1) sans surtout se précipiter sur la correction.

Bibliographie

- Jean-Marie Monier, *Cours et Exercices*, collection « J'intègre », éd. Dunod.
- Simon et Blume, *Mathématiques pour économistes*, éd. Économica.
- *Recueil d'exercices et résumés de cours*, coll. « Flash U », éd. Armand Collin.
- Tout livre d'analyse et d'algèbre linéaire de 1er cycle universitaire (1re année).

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 HEURES.

CONSIGNES

Aucun document n'est autorisé.
Calculatrices interdites.

TRAITEZ OBLIGATOIREMENT TROIS EXERCICES :
Le candidat précisera en début de copie son choix entre l'exercice 3 et l'exercice 4.
- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3 ou 4

SUJET

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations $x^3 - 2x + 1 = 0$ et $x^3 - 2x - 4 = 0$. Pour chacune de ces équations, on commencera par trouver une solution évidente.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

On note l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est A.

2. Soient les vecteurs $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (1,-1)$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis reconnaître la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$.

3. Justifier qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. Déterminer P et P^{-1}.

4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque à coefficients réels. Montrer que $DM = MD$ si et seulement si M est une matrice diagonale.

5. En déduire que toute matrice X telle que $AX = XA$ est de la forme PYP^{-1} où Y est une matrice diagonale.

6. On souhaite résoudre l'équation matricielle (E) d'inconnue X appartenant à l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels :

$$(E) \quad X^3 - 2X = \frac{1}{2}A.$$

a) Déterminer les matrices diagonales Y solutions de l'équation matricielle : $\quad (E') \quad Y^3 - 2Y = \frac{1}{2}D.$

b) Montrer que si X est solution de (E) alors X commute avec A.

c) Résoudre (E).

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_0 et u_1.

2.a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$: $\quad 0 \leqslant \dfrac{x^n}{x^2+1} \leqslant x^n$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(u_{2k}+u_{2k-2}) = (-1)^n u_{2n} - u_0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(u_{2k+1}+u_{2k-1}) = (-1)^n u_{2n+1} - u_1.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_{n+2}+u_n$.

5. Déduire des questions précédentes, l'existence et le calcul des limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k}.$$

Vous traiterez au choix l'exercice 3 ou l'exercice 4.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul. Un jeu se déroulant en n parties indépendantes, confronte deux joueurs A et B qui à chaque partie lancent une pièce équilibrée.
Si la pièce amène pile, B donne un euro à A, sinon c'est A qui donne un euro à B.

1. Le jeu terminé, on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le joueur A a gagné.

Reconnaître la loi de X. Préciser son espérance et sa variance.

2. Le jeu terminé, on note Y la variable aléatoire qui comptabilise en euros, le gain total de A.

a) Déterminer une relation entre X et Y.

b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, les séries entières sont à variable réelle.

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n \quad \sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n \quad \sum_{n\geqslant 0}(n+1)(n+2)x^n.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2x^n = 0.$

Barème : 9 pts pour l'exercice 1 ; 7 pts pour l'exercice 2 ; 4 pts pour l'exercice 3 ; 4 pts pour l'exercice 4.