CORRIGÉ

Correction par Ludovic Pillons concepteur du sujet

Exercice 1

1. L'équation $x^3 - 2x + 1 = 0$ admet comme solution évidente $x = 1$, et par identification ou division euclidienne, on trouve $x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$. L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet deux solutions réelles $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. L'équation $x^3 - 2x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles qui sont $\boxed{-1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.}$

L'équation $x^3 - 2x - 4 = 0$ admet comme solution évidente $x = 2$, et par identification ou division euclidienne, on trouve $x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$. L'équation $x^2 + 2x + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle ($\Delta = -4$). L'équation $x^3 - 2x - 4 = 0$ admet une seule solution réelle qui est $\boxed{2.}$

2. Soient les vecteurs $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (1,-1)$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est libre (sinon on aurait une relation de colinéarité du type $e_1 = ke_2$ qui aboutit à une absurdité) et une base de $\mathbb{R}^2$, car $\mathcal{B}$ est libre et de cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}^2$.

Le vecteur coordonnées de $u(e_1)$ dans la base canonique est $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et celui de $u(e_2)$ dans la base canonique est $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. On trouve $u(e_1) = -2e_1$ et $u(e_2) = 8e_2$. La matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ est D.

3. Il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ car A et D sont les matrices du même endomorphisme u relativement à la base canonique pour A et la base $\mathcal{B}$ pour D. La matrice P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$. Comme $(1,0) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ et $(0,1) = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$, on a $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$.

4. Soit $M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ une matrice quelconque à coefficients réels. On a $DM = \begin{pmatrix}-2a & -2b\\8c & 8d\end{pmatrix}$ et $MD = \begin{pmatrix}-2a & 8b\\-2c & 8d\end{pmatrix}$. On a alors $DM = MD$ si et seulement si $b = c = 0$ soit M diagonale.

5. On a :

$$\begin{aligned}
AX = XA &\underset{question\,3}{\iff} PDP^{-1}X = XPDP^{-1}\\
&\iff DP^{-1}XP = P^{-1}XPD\\
&\underset{question\,4}{\iff} Y = P^{-1}XP \quad \text{est diagonale}\,.
\end{aligned}$$

6.a) La matrice diagonale $Y = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$ est solution de l'équation matricielle, $(E')\quad Y^3 - 2Y = \dfrac{1}{2}D$ si et seulement si $\begin{pmatrix}a^3 - 2a & 0\\0 & b^3 - 2b\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$, ce qui équivaut à ce que a (resp. b) soit solution de l'équation $x^3 - 2x + 1 = 0$ (resp. $x^3 - 2x - 4 = 0$) résolue en question 1.

Les matrices diagonales Y solutions de l'équation matricielle, $(E')\quad Y^3 - 2Y = \dfrac{1}{2}D$ sont les trois matrices :

$$Y_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix},\quad Y_2 = \begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 0\\0 & 2\end{pmatrix},\quad Y_3 = \begin{pmatrix}\frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 0\\0 & 2\end{pmatrix}.$$

b) Soit X une solution de (E) alors $AX = 2(X^3 - 2X)X = 2X^4 - 4X^2 = X.2(X^3 - 2X) = XA$ et X commute avec A.

c) On a :

$$\begin{aligned}
X^3 - 2X = \frac{1}{2}A &\underset{questions\,6b)\,et\,5}{\iff} (PYP^{-1})^3 - 2PYP^{-1} = \frac{1}{2}PDP^{-1}\\
&\iff P(Y^3 - 2Y)P^{-1} = P\frac{1}{2}DP^{-1}\\
&\underset{P\,inversible}{\iff} Y^3 - 2Y = \frac{1}{2}D\,.
\end{aligned}$$

Les matrices X solutions de l'équation matricielle, $(E)\quad X^3 - 2X = \frac{1}{2}A$ sont les trois matrices PY_1P^{-1}, PY_2P^{-1} et PY_3P^{-1}. Soit les trois matrices :

$$X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} & -5+\sqrt{5} \\ -5+\sqrt{5} & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{5} & -5-\sqrt{5} \\ -5-\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

1. On a $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\mathrm{Arctan}(x)]_0^1$ et $\boxed{u_0 = \frac{\pi}{4}.}$ On a $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1$ et $\boxed{u_1 = \frac{\ln 2}{2}.}$

2.a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leqslant \frac{x^n}{x^2+1} \leqslant x^n$ car $x \mapsto \frac{x^n}{x^2+1}$ est positive sur $[0,1]$, $x^n \geqslant 0$ et $x^2+1 \geqslant 1$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, par la question précédente et la propriété de croissance de l'intégrale, on a :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x,$$

soit $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Par le théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(u_{2k}+u_{2k-2}) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{2k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{2k-2} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1} u_{2k} \\ &= (-1)^n u_{2n} - u_0\,. \end{aligned}$$

De manière analogue, on obtient : $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(u_{2k+1}+u_{2k-1}) = (-1)^n u_{2n+1} - u_1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+2}+u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}+x^n}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

et $\boxed{u_{n+2}+u_n = \frac{1}{n+1}.}$

5. Par les questions 4 et 3, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(u_{2k}+u_{2k-2}) = (-1)^n u_{2n} - u_0$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(u_{2k+1}+u_{2k-1}) = (-1)^n u_{2n+1} - u_1$.

Or $|(-1)^n u_{2n}| = u_{2n}$ et $|(-1)^n u_{2n+1}| = u_{2n+1}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0, les suites $((-1)^n u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0. Donc les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}$ existent et on a par la question 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} = -\frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 3

1. Chaque partie amène un succés avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et un échec avec cette probabilité. la variable X correspond à la somme de n épreuves indépendantes chacune suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. On a $\boxed{E(X) = \frac{n}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n}{4}.}$

2. L'ensemble des valeurs de Y est $Y(\Omega) = [\![-n, n]\!]$. Si A a gagné k fois, il a perdu $n-k$ fois. Son gain est alors égal à $k-(n-k)$ soit $2k-n$. On a donc $\boxed{Y = 2X - n.}$

b) Par linéarité de l'espérance, $E(Y) = 2E(X) - n$ et $\boxed{E(Y) = 0.}$ On a :

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ &= E(Y^2) \\ &= E((2X-n)^2) \\ &\underset{\text{linéarité}}{=} 4E(X^2) - 4nE(X) + n^2 \\ &= 4(V(X) + (E(X))^2) - 4nE(X) + n^2\,. \end{aligned}$$

et on trouve $\boxed{V(Y) = n.}$

Exercice 4

Dans tout l'exercice, les séries entières sont à variable réelle.

1. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)(n+2)x^n$ est égal à 1.

Pour $x \in]-1,1[$, on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et par dérivation terme à terme (les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)(n+2)x^n$ convergent normalement sur tout segment inclus dans $]-1,1[$), on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

2. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}(3n+1)^2x^n$ est 1. On a pour tout $x\in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2x^n &= 9\sum_{n=0}^{+\infty}n^2x^n+6\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\\
&= 9\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n-3\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)+6\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\\
&= 9\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n-21\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n-17\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\\
&= 9\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n-21\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)-17\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\\
&= 9\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n-21\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n+4\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\\
&\underset{question\ 1}{=} \frac{18}{(1-x)^3}-\frac{21}{(1-x)^2}+\frac{4}{(1-x)}\\
&= \frac{4x^2+13x+1}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2x^n=0$ si et seulement si $x\in]-1,1[$ et $4x^2+13x+1=0$. L'équation $4x^2+13x+1=0$ admet deux solutions réelles $x_1=-\frac{13+3\sqrt{17}}{8}$ et $x_2=\frac{-13+3\sqrt{17}}{8}$. On a $x_1<-1$ car $-5-3\sqrt{17}<0$ et comme $x_1x_2=1$, $x_2\in]-1,0[$. Finalement, $\boxed{\frac{-13+3\sqrt{17}}{8}}$ est l'unique solution de l'équation $\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2x^n=0$.