CORRIGÉ

Exercice 1

1. L'urne est choisie au hasard, donc X suit une loi uniforme à valeurs dans $\{1,\cdots,5\}$:

$$X(\Omega)=\{1,\cdots,5\} \text{ et } \forall i\in\{1,\cdots,5\}, P(X=i)=\frac{1}{5}.$$

$E(X)=\sum_{i=1}^{5}\frac{i}{5}=3.$

2. La boule est choisie au hasard dans l'urne donc, pour tout $i\in\{1,\cdots,5\}$, $Y/\ X=i$ suit une loi uniforme à valeurs dans $\{1,\cdots,i\}$:

$$(Y/\ X=i)\ \ (\Omega)=\{1,\cdots,i\} \text{ et } \forall k\in\{1,\cdots,i\}, P(Y=k/X=i)=\frac{1}{i}.$$

On a $Y(\Omega)=\{1,\cdots,5\}$ car le numéro de la boule tirée peut varier de 1 à 5 lorsque le tirage se fait dans l'urne 5.

Soit $k\in\{1,\cdots,5\}$. Le système $(X=i)_{i\in\{1,\cdots,5\}}$ est un système complet d'événement et en utilisant la formule des probabilités totales, on obtient:

$$P(Y=k)=\sum_{i=1}P(Y=k/X=i)P(X=i)=\sum_{i=k}^{5}\frac{1}{i}\frac{1}{5}$$

car $P(Y=k/X=i)=0$ si $k>i$.

3. On a $E(Y)=\sum_{k=1}^{5}kP(Y=k)=\sum_{k=1}^{5}k\sum_{i=k}^{5}\frac{1}{i}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{i=k}^{5}\frac{k}{i}$

On somme donc sur tous les couples (k,i) vérifiant $1\leq k\leq i\leq n$, c'est une somme finie, on peut donc échanger l'ordre de sommation et on obtient: $E(Y)=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}\sum_{i=k}^{5}\frac{k}{i}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}k.$

On sait que: $\sum_{k=1}^{i}k=\frac{i(i+1)}{2}$. Donc, on obtient: $E(Y)=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{5}(i+1)=2.$

Exercice 2

1 :

$$A=\begin{pmatrix}5&-2&-3\\1&2&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}.$$

Si A était inversible, en multipliant à droite la relation $A^2=4A$ par A^{-1}, on obtiendrait $A=4I$, ce qui est faux. Donc A n'est pas inversible.

2. Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, A^n=4^{n-1}A$.

Au rang $n=1$, on a bien $A=A$. La propriété est vérifiée au rang 1.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que $A^n=4^{n-1}A$.

On a alors : $A^{n+1}=A^n\times A=4^{n-1}A\times A=4^{n-1}A^2=4^nA$. Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*, A^n=4^nA$.

3. On sait que n'importe quelle matrice commute avec I, on peut donc appliquer le binôme de Newton (pour les matrices) :

$$B^n = (I+A)^n = A^0 I^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k A^k I^{n-k} = I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k 4^{k-1} A = I + \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{n} C_n^k 4^k 1^{n-k})A.$$

Or d'après la formule du binôme de Newton pour les nombres, on a
$\sum_{k=1}^{n} C_n^k 4^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 4^k 1^{n-k} - 1 = (1+4)^n - 1 = 5^n - 1$. D'où $B^n = I + \frac{5^n-1}{4}A$.

4. On retrouve le résultat de la question précédente en utilisant un raisonnement par récurrence: Au rang $n=1$, on a bien $B = I + A$. La propriété est vérifiée au rang 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $B^n = I + \frac{5^n-1}{4}A$. On a alors:
$B^{n+1} = B^n \times B = (I + \frac{5^n-1}{4}A)(I+A) = I + A + \frac{5^n-1}{4}(A + A^2) = I + (1 + \frac{5^{n+1}-5}{4})A = I + \frac{5^{n+1}-1}{4}A$.
Ainsi La propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 :

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroit sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\forall x \in [n, n+1], n \geq 1$: $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$, d'où, en intégrant de n à $n+1$ (bornes dans l'ordre croissant):

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n}dx.$$

d'où le résultat. On peut aussi prouver ce résultat en utilisant le théorème des accroissements finis.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{n+1} > 0$, donc $v_{n+1} < u_{n+1}$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$ et $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$

D'après la question 1) , on a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et $v_{n+1} - v_n \geq 0$. Ainsi La suite (u_n) est décroissante et La suite (v_n) est croissante donc $u_n \leq u_1$ et $v_1 \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_1 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_1$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes car la suite (u_n) est décroissante et minorée par v_1 et la suite (v_n) est croissante et majorée par u_1.

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, les deux suites convergent vers la même limite qu'on note γ

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma \leq u_n$ (car (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante).
b) On a $-u_n \leq -\gamma \leq -v_n$
donc $-u_n + M_n \leq M_n - \gamma \leq -v_n + M_n$
d'où $\frac{v_n - u_n}{2} \leq M_n - \gamma \leq$ 2
c.à.d $\frac{-1}{2n} \leq M_n - \gamma \leq \frac{1}{2n}$.
Par conséquent $|M_n - \gamma| \leq \frac{1}{2n}$