CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. $t = \frac{4}{x}$ équivaut à $x = \frac{4}{t}$ d'où $dx = \frac{-4}{t^2}dt$. Le changement de variable donne:

$$I = \int_4^1 \frac{\ln \frac{2}{t}}{4 + \frac{16}{t^2}} \frac{-4}{t^2} dt = -\int_1^4 \frac{\ln \frac{t}{2}}{4 + t^2} dt = -I$$

2. On a donc $I = -I$ d'où $I = 0$.

EXERCICE 2

1. F est l'ensemble des combinaisons linéaires de f_1, f_2 et f_3, éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$(ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), c'est donc un sous-espace vectoriel. Par définition, (f_1, f_2, f_3) est une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est aussi libre: Si $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ on a pour tout x dans $\mathbb{R}$: $(a + bx + cx^2)e^{-x} = 0$ d'où $a + bx + cx^2 = 0$. Chacun des coefficients a, b et c est donc nul.

La famille (f_1, f_2, f_3) étant libre et génératrice est une base de F.

2. On calcule $f_1'(x) = -e^{-x}$ d'où $\phi(f_1) = -f_1$, $f_2'(x) = (1 - x)e^{-x}$ d'où $\phi(f_2) = f_1 - f_2$ et $f_3'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$ d'où $\phi(f_3) = 2f_2 - f_3$.

On obtient 3 éléments de F, donc par linéarité de la dérivation, la dérivée d'un élément de F est dans F et l'application ϕ est linéaire. Enfin, la matrice A s'obtient directement à partir des calculs ci-dessus.

On peut calculer le déterminant $\det A = -1$. Il est non nul, donc A est inversible, et on calcule (par les cofacteurs)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'autres méthodes sont possibles par exemple celle du pivot de Gauss.

4. Une primitive de g dans F est la fonction $\phi^{-1}(g)$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -14 \\ -8 \end{pmatrix}$

La primitive cherchée est donc: $G(x) = -(17 + 14x + 8x^2)e^{-x}$.

5. a) On trouve $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) On a $A = B - I_3$ et donc $A^{n+1} = A^n(B - I_3)$, ce qui permet de montrer facilement par récurrence la formule demandée.

6. La dérivée n-ième de la fonction g est la fonction $\phi^n(g)$ de coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ données par $A^n \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n(3 + 2n + 8n(n-1)) \\ (-1)^n(-2 - 16n) \\ (-1)^n 8 \end{pmatrix}$. On a donc : $g^{(n)}(x) = (-1)^n(3 + 2n + 8n(n-1) - 2x(1 + 8n) + 8x^2)e^{-x}$.

EXERCICE 3

Notons les événements :

A_n:"on lance la pièce A au n-ième lancer",
B_n:"on lance la pièce B au n-ième lancer",
C_n:"Pile sort au n-ième lancer",

1. On peut écrire :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}/A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}/B_n)P(B_n).$$

Or si on lance la pièce A au n-ième lancer, la probabilité de la relancer au coup suivant est égale à celle de faire Pile avec cette pièce, soit $\frac{1}{4}$. De même si on lance la pièce B au n-ième lancer, la probabilité de relancer la pièce A au coup suivant est égale à celle de faire Face avec la pièce B, soit $\frac{1}{2}$. Donc:

$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{2}(1 - P(A_n))$$

c.à.d $p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_n$.

2. La suite $(p_n)_n$ vérifie une relation de récurrence arithmético-géométrique dont le point fixe est $\frac{2}{5}$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ p_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}(p_n - \frac{2}{5}).$$

Il s'en suit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_n - \frac{2}{5} = (-\frac{1}{4})^{n-1}(p_1 - \frac{2}{5}).$$

Comme $p_1 = \frac{1}{2}$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}(-\frac{1}{4})^{n-1}.$$

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{1}{4})^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{5}$.

4. De la même façon qu'en **1.**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(C_n) = P(C_n/A_n)P(A_n) + P(C_n/B_n)P(B_n) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{2}(1 - P(A_n)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_n.$$

Ainsi $P(C_n) = p_{n+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}(-\frac{1}{4})^n$.