

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Si on désigne par E l'ensemble des 3 boules de l'urne et par Ω l'univers des possibles alors $\text{Card}(\Omega) = 3^n$ et $X(\Omega) = \{0, \dots, n-1\}$. $\forall i \in X(\Omega)$, $\binom{n-1}{i}$ est le nombre de façons de choisir les i tirages où il y a changement de couleur parmi les $n-1$ tirages (il ne peut y avoir changement de couleur au premier tirage); le nombre de couleurs possibles pour la boule tirée en premier est 3; le nombre de façons de choisir les couleurs des boules tirées aux i tirages où il y a changement de couleur est 2^i . On a alors $\text{Card}\{X=i\} = \binom{n-1}{i} \times 3 \times 2^i$.

Ainsi, on a bien pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $P(X=i) = \frac{\binom{n-1}{i} \times 3 \times 2^i}{3^n}$.

2. Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $P(X=i) = \frac{\binom{n-1}{i} \times 3 \times 2^i}{3^n} = \binom{n-1}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-i}$.
 X suit une loi binomiale de paramètres $n-1$ et $\frac{2}{3}$ et on en déduit que
 $E(X) = (n-1)\frac{2}{3}$ et $V(X) = (n-1)\frac{2}{9}$.

EXERCICE 2

1. Soit M le point entre H et B où le gradient accoste. On pose $x = HM$, avec $x \in [0; 7]$. Par le théorème de Pythagore, la durée (en heures) du trajet de A à M est $\frac{1}{4}\sqrt{x^2+9}$; celle du trajet de B à M est $\frac{1}{5}(7-x)$.

Résoudre le problème revient bien à déterminer le minimum sur $[0; 7]$, de la fonction f définie par
 $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2+9} + \frac{1}{5}(7-x)$.

2. $\forall x \in [0; 7], f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}$ et $f'(x) = \frac{5x - 4\sqrt{x^2+9}}{20\sqrt{x^2+9}} = \frac{9(x^2-16)}{20\sqrt{x^2+9}(5x+4\sqrt{x^2+9})}$.
La fonction f est alors décroissante sur $[0; 4]$ et croissante sur $[4; 7]$.

3. D'après la question précédente, f admet un minimum en 4 qui est $f(4)$ et on a $f(4) = \frac{37}{20} = 1,85$. Le gardien doit donc aborder à 4 km du point H et la durée minimale du trajet est 1,85 heures soit 1h51min.

EXERCICE 3

1.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} - AU_n = 0$.

b) Par récurrence, on démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2. La 2-ème colonne C_2 de A est le double de la 1-ère colonne C_1 qui est non nulle. Donc le rang de A est égal à 1.

Son noyau $\text{Ker}(A)$ est par le théorème du rang, de dimension 1. $B_1 = (f_1)$ avec $f_1 = 2e_1 - e_2$, est une base de $\text{Ker}(A)$ car $A \cdot (2e_1 - e_2) = 2C_1 - C_2 = 0$.

3. L'ensemble des vecteurs X de $\mathbb{R}^2$ tels que $AX = 3X$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ car c'est le sous-espace $\text{Ker}(A - 3I_3)$. On a $X(x, y) \in \text{Ker}(A - 3I_3)$ si et seulement si $2x + 3y = 0$. $\text{Ker}(A - 3I_3)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ (donc de dimension 1). Une base B_2 de $\text{Ker}(A - 3I_3)$ est $B_2 = (f_2)$ avec $f_2 = 3e_1 - 2e_2$.

4.a) La famille $B = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car elle est constituée de 2 vecteurs non colinéaires ($\text{Dét}(f_1, f_2) = -1 \neq 0$).

b) On a $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ qui est inversible car B est une base de $\mathbb{R}^2$. On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;
puis $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.a) Le résultat se démontre par récurrence.

b) Par récurrence, on obtient $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Par 5a), on a $A^n = \begin{pmatrix} -3^{n+1} & -2 \cdot 3^{n+1} \\ 2 \cdot 3^n & 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$.

6. D'après 1b) et 5b), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = -3^{n+1}x_0 - 2 \cdot 3^{n+1}y_0$ et $y_n = 2 \cdot 3^n x_0 + 4 \cdot 3^n y_0$;
enfin, $x_n = -3^{n+2}$ et $y_n = 2 \cdot 3^{n+1}$.