2019

CORRIGÉ

Mathématiques

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE ECONOMIQUE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A

1. (a) Après calcul, on obtient : $A^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = A^2.A = 0$.

   (b) $A^3 = 0$, donc le polynôme $P(X) = X^3$ est un polynôme annulateur de A.
   Donc 0, l'unique racine de P, est l'unique valeur propre possible de A.

   (c) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} -x+2y+z=0 \\ -x-y-2z=0 \\ x+y+2z=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z \\ y=-z \end{array}\right.$$

   Ainsi, Ainsi, le noyau de f est l'espace vectoriel engendré par le vecteur $(-1, -1, 1)$. Ce vecteur étant non nul, il constitue une base de $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\mathrm{Ker}(f) = Vect((-1,-1,1)) \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1.$$

   (d) Le noyau de f est de dimension 1, donc 0 est bien valeur propre de f.
   On sait aussi que c'est l'unique valeur propre de f.
   Or, le sous-espace propre de f associé à 0, qui n'est autre que son noyau, est de dimension 1, alors que E est de dimension 3, donc f n'est pas diagonalisable.

2. (a) Montrons dans un premier temps que la famille $\mathcal{B}'$ est libre.
   Soient a, b et c trois réels tels que : $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0_E$.

$$\text{On a alors : } \left\{\begin{array}{r} -a+2b-c=0 \\ -a-b+2c=0 \\ a+b+c=0 \end{array}\right. \underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\overset{L_3 \to L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{r} -a+2b-c=0 \\ -3b+3c=0 \\ 3b=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow a=b=c=0$$

   Donc la famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre de E. De plus, c'est une famille de cardinal 3 dans l'espace vectoriel E qui est de dimension 3, donc la famille $\mathcal{B}'$ est une base de E.

   (b) On sait déjà que $e'_1 \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $f(e'_1) = 0_E$. De plus, un calcul donne :

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } f(e'_2) = e'_1 \text{ et } f(e'_3) = e'_2.$$

En conclusion : $\begin{cases} f(e_1') = 0_E \\ f(e_2') = 1.e_1' + 0e_2' + 0e_3' \\ f(e_3') = 0.e_1' + 1.e_2' + 0.e_3' \end{cases}$, donc T est bien la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

3. (a) On remarque que $M = -A + I$, donc $\boxed{\alpha = -1 \text{ et } \beta = 1 \text{ conviennent}}$.

(b) D'après ce qui précède, $h = -f + id_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E. Ainsi,

$$h(e_1') = e_1',\ h(e_2') = -e_1' + e_2' \text{ et } h(e_3') = -e_2' + e_3'. \text{ Donc } \boxed{M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(c) On remarque que la matrice M' est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont les valeurs situées sur sa diagonale. Donc 1 est l'unique valeur propre de M'. M et M' étant semblables, on en déduit que 1 est aussi l'unique valeur propre de M.
Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de M, et $\boxed{M \text{ est donc inversible}}$.

(d) $(M - I)^3 = (-A)^3 = -A^3 = \boxed{0}$. En développant $(M - I)^3$, on obtient donc la relation :

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0, \text{ ou encore : } M(M^2 - 3M + 3I) = I. \text{ Donc } \boxed{M^{-1} = M^2 - 3M + 3I}$$

(e) Rappelons que $M = -A + I$, et que les matrices $-A$ et I commutent. D'après la formule matricielle du binôme de Newton :

$$\forall n \geqslant 2, \quad M^n = (-A + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^k I^{n-k}$$

On sait alors que $A^3 = 0$, donc par récurrence, on peut montrer que : $\forall k \geqslant 3, \quad A^k = 0$.
Il reste ainsi :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad M^n = I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2}.$$

On vérifie ensuite que l'égalité ci-dessus reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui permet de conclure qu'elle est valable pour tout entier naturel n.
Pour $n = -1$, l'égalité ci-dessus devient : $M^{-1} = I + A + A^2$.
Or, on a montré que $M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$, donc :

$$M^{-1} = (-A + I)^2 - 3(-A + I) + 3I = A^2 - 2A + I + 3A - 3I + 3I = A^2 + A + I$$

Donc $\boxed{\text{l'égalité est bien vraie pour } n = -1}$.

Partie B

1. $VT = V.V^2 = V^3 = V^2.V = TV$. De plus, V est la matrice représentative de g dans la base $\mathcal{B}'$ et T est la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, donc $g \circ f = f \circ g$.

2. (a) $f(g(e'_1)) = f \circ g(e'_1) = g \circ f(e'_1) = g(0_E) = 0_E$, donc $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
On sait par ailleurs que (e'_1) est une base de $Ker f$, donc $g(e'_1)$ appartient à $Vect(e'_1)$.
Autrement dit, il existe un réel a tel que $g(e'_1) = ae'_1$.

   (b) $f(g(e'_2) - ae'_2) = f(g(e'_2)) - af(e'_2) = g(f(e'_2)) - ae'_1 = g(e'_1) - ae'_1 = 0_E$.
Donc $g(e'_2) - ae'_2$ appartient aussi au noyau de f.
Et de même que dans la question précédente, il existe un réel b tel que $g(e'_2) - ae'_2 = be'_1$.
Ainsi, il existe un réel b tel que $g(e'_2) = be'_1 + ae'_2$.

   (c) $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = g(e'_2) = ae'_2 + be'_1$.
Donc $f(g(e'_3) - ae'_3 - be'_2) = f \circ g(e'_3) - af(e'_3) - bf(e'_2) = ae'_2 + be'_1 - ae'_2 - be'_1 = 0_E$.
Donc $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2$ appartient au noyau de f.

   (d) D'après ce qui précède, il existe un réel c tel que $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 = ce'_1$,
donc $g(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1$.

Pour résumer : $\begin{cases} g(e'_1) = ae'_1 \\ g(e'_2) = be'_1 + ae'_2 \\ g(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1 \end{cases}$. Donc $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

3. On obtient : $V^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & ab + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Or $V^2 = T$, donc : $\begin{cases} a^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ ab + 2ac = 0 \end{cases}$

Ceci implique que $a = 0$, et donc que ... $0 = 1$.
Ce résultat absurde permet d'invalider l'hypothèse de départ, c'est-à-dire qu'il permet de conclure :

Il n'existe pas d'endomorphisme g tel que $g \circ g = f$.

EXERCICE 2

Partie A

1. D'après une lecture du graphique, il semblerait que $\boxed{f \text{ admette un minimum local au point } (1,1).}$
   La valeur de ce minimum serait proche de $\boxed{3}$.

2. (a) $(x,y) \mapsto \dfrac{x}{y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas.
   $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ comme inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas.
   $(x,y) \mapsto y^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ comme fonction polynomiale.
   Ainsi, $\boxed{\text{par somme, } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*}$.

   (b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{\partial_1(f)(x,y) = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}}$ et $\boxed{\partial_2(f)(x,y) = -\dfrac{2x}{y^3} + 2y}$.
   Et (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ -\dfrac{2x}{y^3} + 2y = 0 \end{cases} \underset{x>0, y>0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = y \\ -\dfrac{2}{x} + 2x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2\dfrac{x^2-1}{x} = 0 \end{cases} \underset{x>0, y>0}{\Longleftrightarrow} x = y = 1$$

   Donc $\boxed{f \text{ admet un unique point critique : le point } A = (1,1)}$.

   (c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:
   $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \dfrac{2}{x^3}$, $\quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = -\dfrac{2}{y^3}$ et $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = \dfrac{6x}{y^4} + 2$.
   Au point A, on obtient bien la matrice hessienne : $\boxed{H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}}$.

   (d) Cherchons les valeurs propres de H : celles-ci sont les réels λ tels que la matrice $H - \lambda I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire tels que $(2-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0$.
   Or, pour tout réel λ, $(2-\lambda)(8-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 12$. On reconnaît l'expression d'une fonction polynomiale de degré 2, de discriminant $\Delta = 100 - 48 = 52 > 0$.
   H admet donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = \dfrac{10+\sqrt{52}}{2} = 5 + \sqrt{13}$ et $\lambda_2 = \dfrac{10-\sqrt{52}}{2} = 5 - \sqrt{13}$.
   $\lambda_1 > 0$, et $\sqrt{13} < \sqrt{16} < 5$, donc $\lambda_2 > 0$.
   H admet ainsi deux valeurs propres strictement positives : $\boxed{f \text{ présente en } A \text{ un minimum local}}$, conformément à la conjecture effectuée à la question 1.

Partie B

1. La fonction h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h_n'(x) = nx^{n-1} - \dfrac{n}{x^{n-1}} = n\dfrac{x^{2n-2}-1}{x^{n-1}}$.
Donc
$$h_n'(x) \geqslant 0 \iff x^{2n-2} - 1 \geqslant 0 \iff x^{2n-2} \geqslant 1 \iff x \geqslant 1.$$
h_n' est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$, donc :

la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

2. La fonction h_n est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, donc elle réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]h_n(1), \lim\limits_{x\to 0} h_n(x)[=]3,+\infty[$. Or, $4 \in]3,+\infty[$, donc l'équation $h_n(x) = 4$ admet une unique solution sur $]0,1[$ que nous noterons u_n.
De même, La fonction h_n est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]h_n(1), \lim\limits_{x\to +\infty} h_n(x)[=]3,+\infty[$. Or, $4 \in]3,+\infty[$, donc l'équation $h_n(x) = 4$ admet une unique solution sur $]1,+\infty[$ que nous noterons v_n. Donc :

pour tout entier $n \geqslant 1$ l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions u_n et v_n vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. (a) $\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - 1 - \frac{1}{x^n} \\ &= x^n(x-1) + \frac{1-x}{x^{n+1}} \\ &= (x-1)\left(x^n - \frac{1}{x^{n+1}}\right) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

(b) Appliquons l'égalité précédente au réel strictement positif v_n :
$$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = \frac{(v_n-1)(v_n^{2n+1}-1)}{v_n^{n+1}},$$
et puisque $h_n(v_n) = 4$:
$$h_{n+1}(v_n) - 4 = \frac{(v_n-1)(v_n^{2n+1}-1)}{v_n^{n+1}}$$
Et $v_n > 1$, donc $\dfrac{(v_n-1)(v_n^{2n+1}-1)}{v_n^{n+1}} > 0$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4.$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_{n+1}) = 4$, donc l'inégalité précédente peut aussi s'écrire :
$$h_{n+1}(v_n) \geqslant h_{n+1}(v_{n+1})$$
De plus, v_n et v_{n+1} appartiennent tous deux à l'intervalle $]1,+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction h_n est strictement croissante. Ceci permet de conclure que $v_n \geqslant v_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout entier naturel n non nul, la suite (v_n) est donc décroissante .

4. (a) La suite (v_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers un réel ℓ.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n > 1$, donc par passage à la limite : $\boxed{\ell \geqslant 1}$.

(b) Supposons que $\ell > 1$. La suite (v_n) est décroissante et converge vers ℓ, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \ell$$

En composant par la fonction « puissance n » croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n^n \geqslant \ell^n.$$

Or, $\ell > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = +\infty$, donc par comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty}$

Mais alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n(v_n) = 1 + v_n^n + \frac{1}{v_n^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n^n} = 0,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(v_n) = +\infty$.
Ceci est absurde, car on doit avoir pour tout entier naturel n non nul, $h_n(v_n) = 4$.

(c) On a démontré que $\ell \geqslant 1$ mais que ℓ n'est pas stictement supérieur à 1, $\boxed{\text{donc } \ell = 1}$.

5. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n(3) = 1 + 3^n + \frac{1}{3^n}$. Et $n \geqslant 1$, donc $3^n \geqslant 3$ et $\frac{1}{3^n} \geqslant 0$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n(3) \geqslant 4$, donc $h_n(3) \geqslant h_n(v_n)$.
Toujours par stricte croissance de la fonction h_n sur l'intervalle $]1, +\infty[$, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ v_n \leqslant 3}$$

(b)

```
function y=h(n,x)
    y=1+x^n+1/x^n
endfunction
```

(c)

```
function res=v(n)
        a = 1
        b = 3
        while (b-a)>10^(-5)
                c = (a+b)/2
                if h(n,c) < 4 then a=c
                        else b=c
                end
        end
        res=c
endfunction
```

(d) Le graphique représente les valeurs de v_n^n pour les valeurs de n allant de 1 à 20.
Plus précisément, il trace 20 points de coordonnées (n, v_n^n).
On peut conjecturer que la valeur de v_n^n ne dépend pas de n.

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n(v_n) = v_n^n + \dfrac{1}{v_n^n} + 1 = 4$
En multipliant cette égalité par v_n^n, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (v_n^n)^2 + 1 + v_n^n = 4v_n^n,$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (v_n^n)^2 + 1 - 3v_n^n = 0.$$

Donc le réel v_n^n est solution de l'équation polynomiale de degré 2 : $X^2 - 3X + 1 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 3^2 - 4 = 5 > 0$, donc celle-ci admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Mais $\sqrt{5} > \sqrt{4}$, donc $x_2 < \dfrac{3-2}{2} < 1$. Et $v_n > 1$, donc $v_n^n > 1$, donc nécessairement :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \big(v_n\big)^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

(f) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n^n = x_1$, donc $v_n = x_1^{1/n} = \exp\left(\dfrac{\ln x_1}{n}\right)$.

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln x_1}{n}\right) = 0$, et $\displaystyle\lim_{X\to 0} e^X = 1$, donc par composition :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1}$$

EXERCICE 3

Partie A

1. • Si $t \leqslant -1$, $f(t) = -\dfrac{1}{t^3}$. Par ailleurs, $-t \geqslant 1$, donc $f(-t) = \dfrac{1}{(-t)^3} = -\dfrac{1}{t^3}$. Donc $f(t) = f(-t)$.
   • Si $-1 < t < 1$, alors $f(t) = 0$. Par ailleurs, $-1 < -t < 1$, donc $f(-t) = 0$, et ainsi : $f(t) = f(-t)$.
   • Si $t \geqslant 1$, $f(t) = \dfrac{1}{t^3}$. Par ailleurs, $-t \leqslant -1$, donc $f(-t) = -\dfrac{1}{(-t)^3} = \dfrac{1}{t^3}$. Donc $f(t) = f(-t)$.

   Finalement : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(-t) = f(t)$. Donc **la fonction f est paire.**

2. Pour tout réel $A \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^A f(t)dt = \int_1^A \frac{1}{t^3}dt = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2}$.

   Et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2}\right) = \frac{1}{2}$, donc **l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.**

3. (a) Soit $A \geqslant 1$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)dt$, on pose $u = -t$ (et donc $du = -dt$).

   On obtient ainsi : $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)dt = \int_A^1 f(-u).(-1).du = \int_1^A f(-u)du$.

   Et f est une fonction paire, donc pour tout réel u, $f(u) = f(-u)$. Ainsi :

$$\forall A \geqslant 1,\ \int_{-A}^{-1} f(t)dt = \int_1^A f(u)du.$$

   Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{-1} f(t)dt\right) = \int_1^{+\infty} f(u)du = \frac{1}{2}$.

   Donc **l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.**

   (b) La fonction f est définie et positive sur $\mathbb{R}$, et elle est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en -1 et en 1. De plus, d'après les questions précédentes, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$, $\displaystyle\int_{-1}^{-1} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ convergent, donc d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

   Donc **f est une densité de probabilité.**

4. (a) • Si $x \leqslant -1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} -\frac{1}{t^3}dt = \lim_{A \to -\infty} \left[\frac{1}{2t^2}\right]_A^x = \lim_{A \to -\infty} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2A^2}\right) = \frac{1}{2x^2}$

• Si $-1 < x < 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^3}dt + \int_{-1}^{x} 0\ dt = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

• Si $x \geqslant 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} -\frac{1}{t^3}dt + \int_{-1}^{1} 0\ dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{t^3}dt = \frac{1}{2} + 0 + \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2x^2}$.

Conclusion :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}}$$

(b) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument.
Or, la fonction f est paire, donc $t \mapsto |t|f(t)$ est paire.
Donc les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)dt$ et $2\int_{0}^{+\infty} |t|f(t)dt$ ont même nature.
Et f est nulle sur $[0, 1[$, donc X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $2\int_{1}^{+\infty} |t|f(t)dt$ converge.
Or, $2\int_{1}^{+\infty} |t|f(t)dt = 2\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$. On reconnaît une intégrale de Riemann convergente, donc

$\boxed{X \text{ admet une espérance}}$.

On peut donc écrire :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^{0} tf(t)dt + \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$$

Et la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire, donc $\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt = -\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$, donc $\boxed{E(X) = 0}$.

(c) $\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}dt$. On reconnaît une intégrale de Riemann divergente, donc :

$\boxed{X \text{ n'admet pas de variance.}}$

5. (a) La fonction valeur absolue est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc pour tout réel $x < 0$, on a $F_Y(x) = 0$.
Pour $x \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\left(|X| \leqslant x\right) = P\left(-x \leqslant X \leqslant x\right) \\ &= P(X \leqslant x) - P(X < -x) \\ &= F_X(x) - F_X(-x). \end{aligned}$$

Si $x \in]-1, 1[$, alors on a $-x \in]-1, 1[$ aussi, et donc $F_Y(x) = 0$.
Si $x \geqslant 1$, on a $-x \leqslant -1$, et donc $F_Y(x) = 1 - \dfrac{1}{2x^2} - 1\dfrac{1}{2(-x)^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

Au final, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

La fonction F_Y est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et

$$\lim_{x \to 1^-} F_Y(x) = \lim_{x \to 1^+} F_Y(x) = F_Y(1) = 0,$$

donc F_Y est continue en 1, et finalement est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 1.
Donc la variable aléatoire Y est une variable aléatoire à densité.

(b) On obtient une densité de Y en dérivant F_Y en tous points où celle-ci est dérivable (ici en tous points de $\mathbb{R}$ privé de 1), et en donnant une valeur arbitraire en 1.
En posant $f_Y(1) = 2$, on obtient une densité f_Y de Y en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt$ converge absolument,
c'est-à-dire si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} t \frac{2}{t^3} dt$ converge.
On reconnaît à nouveau une intégrale de Riemann convergente, donc

Y admet une espérance.

Et :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt = \int_1^{+\infty} t \frac{2}{t^3} dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{2}{t}\right]_1^A = \boxed{2}.$$

Partie B

1. (a) $Z(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(Z = 0) = P(D = -1) = \dfrac{1}{2}$, et $P(Z = 1) = P(D = 1) = \dfrac{1}{2}$.

   Ainsi, $\boxed{Z \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}}$, donc $E(Z) = \dfrac{1}{2}$ et $V(Z) = \dfrac{1}{4}$.

   Or, par linéarité de l'espérance, $E(Z) = \dfrac{1}{2}E(D) + \dfrac{1}{2}$, donc $E(D) = 2E(Z) - 1 = \boxed{0}$

   Et $V(Z) = V\left(\dfrac{1}{2}D + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}V(D)$, donc $V(D) = 4V(Z) = \boxed{1}$.

   (b) Les variables aléatoires D et Y sont indépendantes et admettent chacune une espérance, donc T admet une espérance, et

$$E(T) = E(D) \times E(Y) = 0 \times E(Y) = \boxed{0}$$

   (c) Soit x un réel fixé.
   Le système : $\{[D = -1], [D = 1]\}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T \leqslant x) &= P([D = -1] \cap [T \leqslant x]) + P([D = 1] \cap [T \leqslant x]) \\ &= P([D = -1] \cap [-Y \leqslant x]) + P([D = 1] \cap [Y \leqslant x]) \\ &= P([D = -1] \cap [Y \geqslant -x]) + P([D = 1] \cap [Y \leqslant x]) \end{aligned}$$

   Et par indépendance des variables aléatoires D et Y, on obtient :

$$\begin{aligned} P(T \leqslant x) &= P(D = -1) \times P(Y \geqslant -x) + P(D = 1) \times P(Y \leqslant x) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}P(Y \leqslant x) + \frac{1}{2}P(Y \geqslant -x)} \end{aligned}$$

   (d) D'après de qui précède : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \dfrac{1}{2}F_Y(x) + \dfrac{1}{2}(1 - F_Y(-x))$.
   Nous distinguerons alors trois cas :

   - Si $x \leqslant -1$, $F_Y(x) = 0$ et $F_Y(-x) = 1 - \dfrac{1}{(-x)^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Donc :

$$F_T(x) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2} = F_X(x)$$

   - Si $-1 < x < 1$, $F_Y(x) = F_Y(-x) = 0$. Ainsi :

$$F_T(x) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2} = F_X(x)$$

   - Si $x > 1$, $F_Y(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $F_Y(-x) = 0$. Donc :

$$F_T(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}(1 - 0) = 1 - \frac{1}{2x^2} = F_X(x)$$

   En conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = F_X(x)}$

2. (a) On a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}}$.

(b) On sait que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est sur l'intervalle $]0,1[$ à valeurs dans $]1,+\infty[$.

- Si $x \leqslant 1$, on a donc $F_V(x) = 0$.
- Si $x > 1$, $F_V(x) = P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-U}} \leqslant x\right) = P\left(\sqrt{1-U} \geqslant \dfrac{1}{x}\right)$.

  En composant par la fonction « racine carrée » strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$F_V(x) = P\left(1 - U \geqslant \frac{1}{x^2}\right) = P\left(U \leqslant 1 - \frac{1}{x^2}\right) = F_U\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

  Or, $x > 1$, donc $0 < \dfrac{1}{x^2} < 1$, donc $0 < 1 - \dfrac{1}{x^2} < 1$, donc :

$$F_V(x) = F_U\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

En conclusion :

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition caractérise la loi, et Y et V ont la même fonction de répartition.
Donc $\boxed{Y \text{ et } V \text{ suivent la même loi}}$.

3. (a)

```
function a=D(n)
    vec=ones(1,n)
    for i=1:n
        if rand()<1/2 then vec(i)=-1
        end
    end
    a=vec
endfunction
```

On préfèrera peut-être la version plus condensée ci-dessous :

```
function a=D(n)
    a=2*grand(1,n,'bin',1,1/2)-1
endfunction
```

(b) On considère le script suivant :

```
n = input('entrer n')
a=D(n)
b=rand(1,n)
c=a./sqrt(1-b) // il manquait le point dans le sujet original
disp(sum(c)/n)
```

Chaque coefficient de `a` est une simulation de la variable aléatoire D.
Chaque coefficient de `1./sqrt(1-b)` est une simulation de la variable aléatoire V, donc de la variable aléatoire Y.
Ainsi, chaque coefficient de `a./sqrt(1-b)` est une simulation de la variable aléatoire $T = DY$, donc de la variable X.
La valeur affichée est la moyenne des coefficients de c, on peut donc penser qu'elle sera proche de l'espérance de X, c'est-à-dire de 0.

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. En particulier un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entrainer très régulièrement à faire des calculs;

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,07 et un écart-type de 5,49, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice d'algèbre linéaire, permettait de vérifier les acquis des candidats sur les notions fondamentales d'algèbre du programme de première et deuxième année, à savoir le calcul matriciel, les applications linéaires et leur représentation matricielle. Il a été abordé par la quasi-intégralité des candidats, notamment grâce à sa position en début du sujet. Volontairement progressif, il était rédigé de manière à ce que les candidats comprennent les méthodes attendues dans chaque question parmi les choix possibles, mais cela n'a malheureusement pas été toujours le cas.

Partie A

1. (a) Certains candidats oublient d'élever au carré le facteur $1/3$ devant la matrice A. Si c'est la seule erreur rencontrée (si les candidats ont écrit $3A^2$ au lieu de A^2), les candidats peuvent obtenir des points pour obtenir $A^3 = 0$ qui sera juste également.

(b) On attend des candidats plutôt qu'ils fassent appel à un (bon) polynôme annulateur et qu'ils en déduisent la bonne conclusion, à savoir que 0 est la seule valeur propre possible, comme l'indique le sujet.
Certains candidats maladroits manquent de recul et refont toute l'étude des valeurs propres en étudiant $A - \lambda I_3$; cela n'est pas pénalisé ici, la question ne demandant pas explicitement de déduire le résultat de la question précédente.

(c) La plupart des candidats se lance dans la résolution d'un système, en général avec succès. Le sujet demande explicitement une base, donc même si l'espace est engendré par un unique vecteur, on attend que le candidat écrive sur sa copie que le vecteur est non nul (ou qu'il a obtenu une famille libre) pour mentionner la dimension.
Les candidats manquant vraisemblablement de maîtrise dans le vocabulaire mathématique employé (confusions entre $\Leftrightarrow$ et $=$, confusions entre base et Vect, ...) sont sanctionnés.

(d) On attend ici un raisonnement complet de la part des candidats. Il n'y a aucun théorème au programme indiquant une caractérisation de la diagonalisabilité des endomorphismes ayant une unique valeur propre. En particulier, si les candidats énoncent la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité, ils n'obtiennent pas de point si ils disent que la somme des dimensions des sous-espaces propres doit être égale à $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$.

2. (a) La plupart des candidats montre correctement que la famille $\mathcal{B}'$ est libre, puis termine avec un argument de cardinalité. Sur ce point, les correcteurs sont intransigeants et pénalisent les candidats qui confondent les notions de cardinal et de dimension.
Certains candidats étudient l'inversibilité de la matrice associée aux trois vecteurs, et le font souvent correctement.

(b) La réponse étant donnée explicitement dans l'énoncé, on attend ici un détail des calculs par le candidat, preuve qu'il comprend manifestement ce qu'on attend de lui dans cette question.

3. (a) Cette question a dérouté de nombreux candidats qui ont oublié de prendre en compte le facteur $1/3$ devant la matrice M.

(b) Cette question est notée en cohérence avec la question précédente, qui avait été peut-être été traitée de façon incorrecte.

(c) La question demandant explicitement d'utilisation la question 3(b), les candidats qui prouvaient que M était inversible par la méthode du pivot n'obtenaient pas tous les points. Il fallait faire le lien avec la matrice M'.

(d) Cette question a été bien traitée par les candidats qui avaient su développer correctement le calcul $(M - I)^3$.

(e) La formule du Binôme de Newton est moyennement connue des candidats, qui font de nombreuses erreurs dans son écriture générale.

Partie B

1. Cette question plutôt facile a parfois été mal comprise par les candidats. On attendait une explication minimale sur la deuxième partie de la question, à savoir que VT est la représentation matricielle de l'application $g \circ f$.

2. (a) Les candidats ont souvent soit bien compris ce qu'il s'agissait de montrer, et dans ce cas ont pu faire de même dans les deux questions suivantes, ou bien n'ont pas abordé du tout ces questions.

(b) Faite uniquement si (a) avait été faite.

(c) Faite également si (a) avait été faite.

(d) Cette question de synthèse aurait pu être abordée par certains candidats sérieux lisant le sujet jusqu'au bout, au moins pour le remplissage des deux premières colonnes de la matrice.

3. La plupart des candidats, même faibles, ont pu calculer V^2, puis poser le système d'équations associé à $V^2 = T$, mais peu ont su conclure correctement le raisonnement par l'absurde.

Exercice 2

Cet exercice d'analyse avait pour but d'étudier une fonction de deux variables, puis une suite implicite, tout en insérant de nombreuses questions d'informatique tout au long de l'étude. La première partie était assez originale sous sa forme, démarrant avec une sortie Scilab de courbes de niveaux, mais les calculs qui suivaient étaient classiques et aisés. La deuxième partie de l'exercice, plus technique, a été plutôt bien traitée par les candidats selon leur niveau de rigueur.

Partie A

1. Il est étonnant que les candidats proposent des résultats très étranges pour les coordonnées du point en lequel f semble admettre un minimum. On a souvent vu apparaître une valeur de 3.01 apparaître (tout autant acceptée que 3).
   On peut toutefois se féliciter que, même si la présence de lignes de niveaux est rare dans les sujets de concours, les candidats ont bien su interpréter le phénomène mis en valeur ici.
2. (a) Les candidats se contentant d'une réponse approximative ne peuvent pas obtenir tous les points ici. On attend a minima que les candidats précisent que les dénominateurs des fractions en présence sont toujours non nuls dans la fonction f.

   (b) Les calculs des dérivées partielles premières n'ont pas donné lieu à de grosses difficulté, ni la définition du point critique. Les candidats peinent cependant à résoudre leur système de manière très formelle, mais ceux qui ne font pas de résolution explicite et donnent le résultat n'obtiennent pas de point.

   (c) Les correcteurs attendent explicitement quatre calculs de dérivées partielles secondes. Si seuls trois calculs sont présents, on attend des candidats qu'ils citent le théorème de Schwarz, ou au moins le fait que la fonction soit de classe C^2 pour appliquer le théorème.

   (d) Les candidats ont bien en tête la méthode à mettre en œuvre, ce qui a donc conduit la majorité à bien répondre à cette question.

Partie B

1. On attend explicitement que les candidats citent la dérivabilité de la fonction h_n avant d'étudier le signe de sa dérivée, et donc de mentionner qu'ils utilisent la fonction $x \mapsto 1/x^n$ dérivable sur $]0, +\infty[$, ou bien que le dénominateur n'est jamais nul, ou bien qu'ils l'aient déjà correctement fait à la question A.2.(a). Lors de l'étude du signe de la dérivée, les candidats qui ne traitent que l'étude de l'équation $h_n'(x) = 0$ n'obtiennent pas de points.
2. Cette question a été dans l'ensemble bien traitée par les candidats. Les raisonnements pour u_n et v_n étant similaires ici, on accepte volontiers qu'un candidat traite l'existence de u_n en détail et dise « De même » pour l'existence de v_n.

3. (a) Cette question facile de calcul a été bien réalisée.
   (b) Question bien traitée lorsqu'elle est abordée.
   (c) Cette question plus délicate a été souvent bien abordée, signe que l'étude de suites implicites est classique et bien travaillée par les candidats.
4. (a) Cette question facile de synthèse a été bien traitée par les candidats.
   (b) À l'inverse, il fallait être plus fin pour percevoir le raisonnement en jeu dans cette question. Très peu de candidats ont su justifier la limite, et encore moins y voir une contradiction.
   (c) Cette question qui ne nécessitait qu'une bonne lecture des deux précédentes a été malheureusement très peu traitée.
5. (a) Le raisonnement était similaire à celui mis en place à la question 2, donc a été souvent bien fait.
   (b) L'écriture de la ligne calculant explicitement $h_n(x)$ par l'ordinateur ne posant pas vraiment de difficulté, les correcteurs examinent avec attention si les candidats comprennent ce que ce signifie le fait d'écrire une fonction. En particulier, les candidats n'ont pas à inclure de `input` une fois la fonction commencée, ni d'inclure un `disp` avant la fin de leur fonction.
   (c) Cette question, sur l'algorithme de dichotomie, fort classique, devrait être bien réalisée par la majorité des candidats, ce n'est cependant que le cas que pour une petite moitié d'entre eux.
   (d) On attendait ici des candidats qu'ils précisent qu'on a tracé la suite $((v_n)^n)$ et non (v_n).
   (e) Seuls les très bons candidats ont vu comment calculer $(v_n)^n$ d'après l'énoncé.

Exercice 3

Cet exercice, en deux parties successives, testait les candidats sur les probabilités continues vues en première et deuxième année. Par sa place en troisième position, il a été moins abordé que les deux autres exercices, sûrement faute de temps par les candidats. Mais il y avait beaucoup de points à obtenir, les candidats étant souvent à l'aise avec les variables aléatoires à densité qu'ils ont beaucoup manipulé en fin de deuxième année.

Partie A

1. De nombreux candidats tentent de maquiller leur raisonnement en insérant des signes négatifs de partout, sans réelle réflexion. Rappelons que de tels comportements sont toujours mal perçus par les correcteurs qui portent alors un regard suspicieux sur toute la suite de la copie.
2. Cette question de cours a été bien traitée par les candidats, qui ont souvent reconnu directement une intégrale de Riemann convergente.
3. (a) Les candidats pensent au bon changement de variable, ce qui leur permet de conclure sans difficulté sur l'égalité des intégrales, puis à la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$.
   (b) Les candidats savent en général bien ce qu'ils doivent montrer ici, mais ne le font pas vraiment en détail, affirmant leurs résultats plutôt que les justifiant. En particulier, on veut explicitement apparaître que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge avant de voir qu'elle vaut 1.

4. (a) Pour le calcul de $F_X(x)$ dans le cas où $x \leqslant -1$, on attend explicitement des candidats qu'ils passent par un calcul d'intégrale partielle, puis qu'ils en calculent la limite, sans quoi ils n'obtiennent aucun point à la question.
   (b) De même que dans les question précédentes, on ne tolère en aucun cas une quelconque égalité du type $\int_1^{+\infty} \ldots = \int_1^A \ldots$ qui mettrait en lumière une confusion faite par le candidat entre intégrale généralisée et intégrale partielle. On peut tolérer que les candidats procèdent à un décourage (Chasles) avant d'avoir la convergence, mais l'étude de la convergence doit apparaître clairement à un moment.
   (c) Les remarques précédentes restent valables.
5. (a) Cette question délicate a été plutôt bien traitée. La plupart des candidats parvient bien à traduire l'événement $[|X| \leqslant x]$ en $[-x \leqslant X \leqslant x]$, dans ce cas ils ont le bon départ pour achever leur calcul.
   (b) On attend surtout ici que les candidats explicitent que la densité est (sauf éventuellement en quelques points) la dérivée de la fonction déterminée précédemment.
   (c) Le raisonnement est un peu similaire à celui fait aux questions précédentes, donc est peu rémunéré ici.

Partie B

1. (a) Les candidats reconnaissent souvent la loi de Bernoulli suivie par Z. Il faut faire attention cependant, on attend ici explicitement de déduire l'espérance de la variance de D de celles de Z. Les points ne sont donc pas donnés aux valeurs des espérances et des variances elles-mêmes, mais plutôt à la bonne application des formules donnant espérance et variance de $2Z - 1$.
   (b) Les candidats traitant la question pensent en général bien à préciser l'indépendance de D et Y.
   (c) On attend explicitement la formule des probabilités totales ou alors un découpage en union disjointe claire.
   (d) Il s'agit ici d'appliquer le calcul précédent, mais cela nécessitait d'avoir les bons résultats à la question 5.(a).
2. (a) Cette dernière question de cours a été traitée souvent, mais acceptée par les correcteurs uniquement dans le cas où elle soit donnée de manière complète (en trois morceaux).
   (b) Les candidats ont eu souvent du mal à manipuler les inégalités, et se sont vite retrouvés bloqués.
3. Peu de candidats ont abordé la question, sûrement faute de temps, la question étant placée en toute fin de sujet.