2017

CORRIGÉ

matière

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET

COMMERCIALE

OPTION SCIENTIFIQUE

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CONCOURS ECRICOME PREPA

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. (a) On sait par croissances comparées que $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=0$. Donc f tend vers 0 en 0. Et par composition de limites (la fonction $t\mapsto e^t$ étant continue en 0) il vient que g tend vers 1 en 0.

   (b) La fonction f est continue et dérivable sur $]0,1]$ en tant que produit de fonctions continues et dérivables sur $]0,1]$ et :

$$\forall x\in]0,1],\ f'(x)=\ln(x)+1.$$

   On en déduit les variations de f sur l'intervalle en question :

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

   La fonction $t\mapsto e^t$ étant croissante, les variations de g sont analogues à celles de f :

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$g(x)$	1	$\searrow$	$\exp(-\frac{1}{e})$	$\nearrow$	1

   (c) La fonction g est continue sur $]0,1]$ par composition, et on vient de voir qu'elle se prolonge par continuité à l'intervalle $[0,1]$ (par $g(0)=1$). L'intégrale de g sur $[0,1]$ est donc faussement impropre et donc l'intégrale $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

2. (a) On a vu à la question 1.(a) que la fonction f admet une limite finie en 0. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ la fonction $t\mapsto (t\ln(t))^n$ admet elle aussi une limite finie en 0. Son intégrale sur $[0,1]$ est donc faussement impropre, donc convergente. Ceci montre que u_n existe pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   (b) D'après les variations de f, on sait que :

$$\forall t\in]0,1],\ -\frac{1}{e}\leqslant f(t)\leqslant 0$$

   Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$|u_n|\leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1\left(\frac{1}{e}\right)^n\mathrm{d}t\leqslant \frac{1}{(n!)e^n}$$

   Or, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n!)e^n}=0$. Par encadrement, la suite (u_n) converge alors vers 0.

(c) • $u_0 = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$.

• $u_1 = \int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$. On se ramène à un segment pour faire une intégration par parties, les fonctions $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et ln étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[\varepsilon, 1]$ avec $0 < \varepsilon < 1$, on a :

$$\int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 t\ln(t)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t}{2}\mathrm{d}t\right) = 0 - \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}$$

(d) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n(\ln(t))^k\mathrm{d}t &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln(t))^k\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{k}{n+1}t^n(\ln(t))^{k-1}\mathrm{d}t\right)\\ &= -\frac{k}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln(t))^{k-1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Il vient donc que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n(\ln(t))^n\mathrm{d}t &= \left(-\frac{n}{n+1}\right)\int_0^1 t^n(\ln(t))^{n-1}\mathrm{d}t\\ &= \left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(-\frac{n-1}{n+1}\right)\int_0^1 t^n(\ln(t))^{n-2}\mathrm{d}t\\ &= \cdots\\ &= \left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(-\frac{n-1}{n+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{n+1}\right)\int_0^1 t^n\mathrm{d}t\\ &= (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\times\frac{1}{n+1} = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

On a donc en itérant plusieurs fois la formule précédente que :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

(e) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $(n+1)^{n+1} \geqslant (n+1)^2 \geqslant n^2$.
et donc :

$$\forall n \geqslant 1,\ |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série de terme général $|u_n|$ est convergente. Donc la série de terme général u_n est absolument convergente, et donc elle est convergente.

(f)
```
function S = somme(n)
    S = 1
    for k = 1 : n
        S = S + (-1)**k/(k+1)**(k+1)
    end
endfunction
```

3. (a) Soit $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $t \mapsto e^t$ étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[x, 0]$, on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour obtenir que :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} e^0 \frac{(x-0)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[x,0]} \left|e^t\right|$$

C'est à dire :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(car $|e^t| \leqslant 1$ sur l'intervalle considéré). Et puisque $|x| \leqslant \frac{1}{e}$, il vient que :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

(b) De la question précédente on déduit l'encadrement :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right], \ -\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \leqslant e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

On sait depuis l'étude des variations de la fonction f que pour tout $t \in]0,1]$ on a $t\ln(t) \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$.
Il vient donc que :

$$\forall t \in]0,1], \ -\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \leqslant e^{t\ln(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t(\ln(t))^k}{k!} \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

Passant cet encadrement à l'intégrale entre 0 et 1, il vient que :

$$-\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \leqslant I - \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

C'est à dire que :

$$|I - S_n| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

(c) D'après la question précédente, il vient que S_n tend vers I lorsque n tend vers $+\infty$.
En d'autres termes, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = I$, c'est à dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = I$$

Et enfin, avec un décalage d'indice dans la somme, on obtient bien :

$$I = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$$

(d) Il suffit de prendre n tel que $\dfrac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \leqslant \varepsilon$ pour assurer que S_n donne une valeur approchée de I à ε près :

```
function I = estimation(eps)
    n = 0
    facto = 1
    while exp(n+1)*facto < 1/eps
        n = n+1
        facto = facto * (n+1)
    end
    I = somme(n)
endfunction
```

EXERCICE 2

1. (a) La matrice J est réelle et symétrique. Il existe donc une matrice réelle orthogonale P et une matrice réelle diagonale D telles que $J = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

   (b) Toutes les colonnes de J sont égales (et non nulles), donc J est de rang 1.
   Donc le noyau de J est de dimension $n-1 > 0$.
   Donc 0 est valeur propre de J, et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

   (c) La matrice diagonale D comporte donc $n-1$ fois 0 sur sa diagonale. Comme sa trace est égale à celle de J (car D et J sont semblables), on a $\mathrm{Tr}(D) = n$,et donc la « dernière » valeur propre de J est n.

   On peut donc prendre $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$.

2. (a) Sachant que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$

   On a bien que :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right]$$

   (b) Introduisons le vecteur-colonne $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On a alors que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = {}^tVX = {}^tXV$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\Big(({}^tXV)({}^tVX) - {}^tXX\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big({}^tX(V{}^tV)X - {}^tXX\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big({}^tXJX - {}^tXX\Big) \\ &= {}^tX\Big(\frac{1}{2}(J-I)\Big)X \end{aligned}$$

On a donc $f(x) = {}^tXMX$ avec $M = \frac{1}{2}(J-I)$.

(c) On l'a démontré dans la question précédente : $M = \frac{1}{2}(J-I)$.

(d) D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}(J-I) \\ &= \frac{1}{2}\Big(PD{}^tP - P{}^tP\Big) \\ &= P\Big(\frac{1}{2}(D-I)\Big){}^tP \end{aligned}$$

On a donc $M = P\Delta{}^tP$ avec :

$$\Delta = \frac{1}{2}(D-I) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n-1}{2} \end{pmatrix}$$

qui est bien diagonale.

(e) On sait d'après le cours que la forme quadratique f admet un minimum et un maximum sur le fermé borné $\mathcal{S}$.
Le minimum de f sur $\mathcal{S}$ est la plus petite valeur propre de M, à savoir $-\dfrac{1}{2}$.
Et le maximum de f sur $\mathcal{S}$ est la plus grande valeur propre de M, à savoir $\dfrac{n-1}{2}$.

3. (a) En tant que matrice réelle symétrique, A est diagonalisable.
Il existe alors une matrice $D_1 = \mathrm{D}iag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et une matrice inversible (et même orthogonale) P telles que $A = PD_1P^{-1}$.
Les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A étant strictement positives, on peut introduire la matrice $D_2 = \mathrm{D}iag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$.
La matrice $B = PD_2P^{-1}$ vérifie alors $B^2 = A$.
Observons de plus que B est elle aussi symétrique, qu'elle est inversible (car ses valeurs propres sont toutes non nulles) et donc que son inverse est elle aussi symétrique.

(b) Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$\begin{aligned}
(x.y)^2 &= \Big(x.v(v^{-1}(y))\Big)^2 \\
&= \Big(v(x).v^{-1}(y)\Big)^2 \text{ (car } v \text{ est symétrique)} \\
&\leqslant \Big(v(x).v(x)\Big)\Big(v^{-1}(y).v^{-1}(y)\Big) \text{ (par Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant \Big(v^2(x).x\Big)\Big(v^{-2}(y).y\Big) \text{ (car } v \text{ et } v^{-1} \text{ sont symétriques)} \\
&\leqslant (u(x).x)(u^{-1}(y).y)
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $y = u(x)$ pour obtenir l'égalité (et $u(x)$ est bien non nul puisque u est inversible, ses valeurs propres étant toutes non nulles).

(c) Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme égale à 1. En appliquant l'inégalité de la question précédente avec $y = x$, on obtient que $1 \leqslant (u(x).x)(u^{-1}(x).x)$.
Ceci prouve que la borne inférieure en question existe, et qu'elle est supérieure ou égale à 1.
Prenons alors x un vecteur propre de u de norme 1.
Il existe donc un $\lambda > 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.
Et alors :

$$(u(x).x)(u^{-1}(x).x) = (\lambda x.x)(\frac{1}{\lambda}x.x) = (x.x)^2 = 1$$

Donc la borne inférieure étudiée vaut 1 (et on peut même dire qu'elle est atteinte, c'est en fait un minimum).

4. (a) $1 \times 2 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$, donc A est inversible.
La formule d'inversion d'une matrice carrée de taille 2 donne alors :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ est non inversible} \\
&\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0
\end{aligned}$$

A admet donc deux valeurs propres réelles : $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, qui sont toutes les deux strictement positives.

(c) Notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé dans la base canonique à la matrice A, on observe que :

$$u(x_1, x_2).(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2).(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$$

et :

$$u^{-1}(x_1, x_2).(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -x_1 + x_2).(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

Donc on a :

$$g(x_1, x_2) = u(x_1, x_2).(x_1, x_2) \times u^{-1}(x_1, x_2).(x_1, x_2)$$

D'après la question **3**, le minimum de g sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$ vaut 1.

PROBLÈME

Partie A

1. La fonction g_a est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{t}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t \\
&= 0 + \lim_{A\to+\infty}\left(\left[-e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A\right) \\
&= \left(0-(-1)\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc g_a est bien une densité de probabilité.

2. (a) D'après le cours, N admet pour densité la fonction $x \mapsto \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.
On a : $E(N) = 0$ et $E(N^2) = V(N) + E(N)^2 = a^2$.

(b) Z_a admet une espérance si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t$ converge (absolument).
Cette intégrale est bien convergente car N admet un moment d'ordre 2 et $E(N^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t$.
De plus, par parité de la fonction intégrée, on a :

$$\begin{aligned}
E(Z_a) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}E(N^2) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}a
\end{aligned}$$

(c) Z_a^2 admet une espérance si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t$ converge.
Or, pour $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t^3}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t &= \left[-t^2e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^x + \int_0^x 2te^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t \\
&= -x^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}} + 2a^2\int_0^x \frac{t}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2a^2
\end{aligned}$$

Donc Z_a admet un moment d'ordre 2 et donc une variance :

$$V(Z_a) = E(Z_a^2) - E(Z_a)^2 = 2a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 = \left(2-\frac{\pi}{2}\right)a^2$$

Partie B

1.

```
function X = tirage(n)
    urnes = zeros(1,n)
    X = 1
    choix = floor(rand()*n)+1
    while urnes(choix) == 0
        urnes(choix) = urnes(choix) + 1
        choix = floor(rand()*n)+1
        X = X+1
    end
```

2. Si $n = 1$, on est sûr qu'au deuxième tirage l'urne contiendra deux boules. Donc X_1 suit la loi certaine de valeur 2 et donc $E(X_1) = 2$ et $V(X_1) = 0$.

3. Si $n = 2$, alors :
   - soit on choisit deux fois la même urne lors des deux premiers tirages, auquel cas on aura $X_2 = 2$.
   - soit on choisit deux urnes différentes lors des deux premiers tirages et alors on mettra forcément une deuxième boule dans l'urne choisie au troisième tirage, tant et si bien qu'on aura $X_2 = 3$.

   Donc $X_2(\Omega) = \{2, 3\}$ et $P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = \frac{1}{2}$.
   Il vient alors $E(X_2) = \frac{5}{2}$ et $V(X_2) = \frac{13}{2} - \frac{25}{4} = \frac{1}{4}$.

4. (a) Au minimum X_n vaut 2 (si on choisit deux fois de suite la même urne aux deux premiers tirages) et au maximum X_n vaut $n+1$ (si on met une boule dans chacune des n urnes, avant de devoir forcément en mettre une deuxième dans l'urne choisie au $n+1$-ième tirage). Pour toutes les valeurs $k \in [\![2, n+1]\!]$ on peut réaliser $(X_n = k)$, par exemple en choisissant successivement les urnes $1, 2, \dots, k-1, 1$. Donc $X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

   (b) Introduisons les événements A_k définis pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ par « l'urne choisie au k-ième tirage contient déjà une boule », et notons B_k l'événement contraire de A_k. Alors, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$:

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap A_k) \\
&= P(B_1) P_{B_1}(B_2) \cdots P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}}(A_k) \\
&= 1 \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+2}{n} \times \frac{k-1}{n} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)}{n^{k-1}}(k-1) = \frac{n!}{n^k (n-k+1)!}(k-1)
\end{aligned}$$

   (c) X_n est une variable aléatoire finie, elle admet donc une espérance.

   (d)

```
function E = esperance(n)
    facto = prod([1:n])
    fac = facto
    somme = 0
    puissance = n
    for k = 2 : (n+1)
        puissance = puissance * n
        fac = fac/(n-k+2)
        somme = somme + k*(k-1)/(puissance*fac)
    end
    E = facto * somme
endfunction
```

Partie C

1. Définissons sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ les fonctions φ et ψ par :

$$\varphi(x) = \ln(1-x) + x \,;\, \psi(x) = \ln(1-x) + x + x^2$$

Ces deux fonctions sont continues et dérivables et :

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} \leqslant 0 \,;\, \psi'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 + 2x = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geqslant 0$$

φ est donc décroissante, avec $\varphi(0) = 0$, donc $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \varphi(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \ln(1-x) \leqslant -x.$$

ψ est croissante, avec $\psi(0) = 0$ donc ψ est positive, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \ln(1-x) \geqslant -x - x^2.$$

Ce qui prouve l'encadrement attendu.

2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant \frac{n}{2}$. Alors pour tout $k \in [\![0, m]\!]$ on a $\frac{k}{n} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
L'encadrement de la question précédente donne alors que :

$$\forall k \in [\![0, m]\!], -\frac{k}{n} - \frac{k^2}{n^2} \leqslant \ln(1 - \frac{k}{n}) \leqslant -\frac{k}{n}$$

En sommant ces encadrements de 0 à m on obtient :

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m} k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{m} k^2 \leqslant \alpha(n, m) \leqslant -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m} k$$

Et donc, par les formules classiques de sommes :

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leqslant \alpha(n, m) \leqslant -\frac{m(m+1)}{2n}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $x \leqslant 0$, on a aussi $\sqrt{n}x \leqslant 0$ et donc $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor \leqslant 0$.
Or X_n prend ses valeurs entre 2 et $n+1$, donc $\sqrt{n}P(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor) = 0$.
Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}P(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor) = 0$.

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\sqrt{n}x - 1 < \lfloor \sqrt{n}x \rfloor \leqslant \sqrt{n}x$.
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{\sqrt{n}x} < \frac{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor}{\sqrt{n}x} \leqslant 1$$

Et donc par le théorème d'encadrement on a :

$$\frac{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor}{\sqrt{n}x} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

En d'autres termes :

$$\lfloor \sqrt{n}x \rfloor \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{n}x$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}x}{\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce quotient tendant vers 0, il est inférieur à 1 à partir d'un certain rang.
Donc il existe N tel que :

$$\forall n \geqslant N,\ \lfloor\sqrt{n}x\rfloor \leqslant \frac{n}{2}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{k-1}{n}\prod_{i=0}^{k-2}\left(1-\frac{i}{n}\right) &= \frac{k-1}{n}\prod_{i=0}^{k-2}\frac{n-i}{n} \\
&= \frac{k-1}{n}\times\frac{\prod_{i=0}^{k-2}(n-i)}{n^{k-1}} \\
&= \frac{k-1}{n^k}\prod_{j=n-k+2}^{n} j \\
&= \frac{k-1}{n^k}\times\frac{n!}{(n-k+1)!} = P(X_n=k)
\end{aligned}$$

(d) Pour tout $n \geqslant N$, on a $\lfloor\sqrt{n}x\rfloor \leqslant \dfrac{n}{2} \leqslant n+1$.

(*Remarque : l'énoncé était imprécis, il faut également prendre $n \geqslant \dfrac{9}{x^2}$ pour assurer que $\lfloor\sqrt{n}x\rfloor \geqslant 2$*)

D'après la question précédente on a alors :

$$\begin{aligned}
P(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor) &= \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1}{n}\prod_{i=0}^{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2}\left(1-\frac{i}{n}\right) \\
&= \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1}{n}\exp\Big(\sum_{i=0}^{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2}\ln(1-\frac{i}{n})\Big) \\
&= \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1}{n}\exp\Big(\alpha(n,\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2)\Big)
\end{aligned}$$

(e) Appliquant l'encadrement de la question **2.** on obtient que pour tout $n \geqslant N$:

$$-\frac{(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2)(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1)}{2n} - \frac{(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2)(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1)(2\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-3)}{6n^2} \leqslant \alpha(n,\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2)$$

Et :

$$\alpha(n,\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2) \leqslant -\frac{(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2)(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1)}{2n}$$

Or $(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2)(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1) \sim nx^2$.
Et $(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2)(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1)(2\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-3) \sim 2x^3n^{3/2}$.
Il vient donc par encadrement que :

$$\alpha(n,\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{x^2}{2}$$

Comme d'autre part on a $\sqrt{n}\dfrac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, il vient que :

$$\sqrt{n}P(X_n=\lfloor\sqrt{n}x\rfloor) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)$$

CONCOURS ECRICOME PREPA

Partie D

1. (a)

$$\lfloor \sqrt{n}x \rfloor = k \iff k \leqslant \sqrt{n}x < k+1 \iff x \in \left[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}}\right[$$

(b) La fonction f_n est positive sur $\mathbb{R}$.
Elle est de plus constante sur chaque intervalle de la forme $\left[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}}\right[$ pour $k \in [\![2, n+1]\!]$ et elle est nulle sur $\left]-\infty, \frac{2}{\sqrt{n}}\right[$ et sur $\left[\frac{n+2}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$ (car $X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$).
Donc f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points (les $\frac{k}{\sqrt{n}}$ pour $k \in [\![2, n+2]\!]$).

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\frac{2}{\sqrt{n}}} 0\mathrm{d}t + \sum_{k=2}^{n+1} \int_{\frac{k}{\sqrt{n}}}^{\frac{k+1}{\sqrt{n}}} \sqrt{n}P(X_n = k)\mathrm{d}t + \int_{\frac{n+2}{\sqrt{n}}}^{+\infty} 0\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{n}\sum_{k=2}^{n+1} P(X_n = k) \int_{\frac{k}{\sqrt{n}}}^{\frac{k+1}{\sqrt{n}}} \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{n}\sum_{k=2}^{n+1} P(X_n = k)\frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} P(X_n = k) = 1
\end{aligned}$$

Donc f_n est bien une densité de probabilité.

2. (a)

$$P(U \leqslant \sqrt{n}x - k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k > \lfloor \sqrt{n}x \rfloor \\ \sqrt{n}x - \lfloor \sqrt{n}x \rfloor & \text{si} \quad k = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor \\ 1 & \text{si} \quad k < \lfloor \sqrt{n}x \rfloor \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned}
P(Y_n \leqslant x) &= P(X_n + U \leqslant \sqrt{n}x) \\
&= P(U \leqslant \sqrt{n}x - X_n) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\Big((U \leqslant \sqrt{n}x - X_n) \cap (X_n = k)\Big) \text{ (par les probabilités totales)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\Big(((U \leqslant \sqrt{n}x - k) \cap (X_n = k)\Big) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(U \leqslant \sqrt{n}x - k) \times P(X_n = k) \text{ (par indépendance de } U \text{ et } X_n) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor - 1} P(X_n = k) + \Big(\sqrt{n}x - \lfloor \sqrt{n}x \rfloor\Big)P(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor) \text{ (d'après } \mathbf{2.a}) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor - 1} \int_{\frac{k}{\sqrt{n}}}^{\frac{k+1}{\sqrt{n}}} f_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\frac{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor}{\sqrt{n}}}^{\frac{\sqrt{n}x}{\sqrt{n}}} f_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t \text{ (par la relation de Chasles)}
\end{aligned}$$

(c) Soit V une variable aléatoire admettant f_n pour densité.
La question précédente montre que Y_n et V ont la même fonction de répartition.
Donc Y_n et V suivent la même loi.
et donc Y_n suit la loi de densité f_n.

(d) D'après la partie **C**, $f_n(x)$ tend vers 0 si $x \leqslant 0$ et vers $x\exp(-\frac{x^2}{2})$ si $x > 0$.
D'après le résultat admis au début de cette partie, il vient que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend en loi vers la variable aléatoire Z_1 de la partie **A**.

3. (a) Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires telles que pour tout n on a X_n et Y_n qui sont définies sur un même espace probabilisé Ω et telles que :
- (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X.
- (Y_n) converge en probabilité vers une constante c.

Alors :
- $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers la variable aléatoire $X + c$.
- (X_nY_n) converge en loi vers la variable aléatoire cX.

(b) On a $\dfrac{X_n}{\sqrt{n}} = Y_n - \dfrac{U}{\sqrt{n}}$.
On a vu que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Z_1.
Pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned} P\left(\left|-\frac{U}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon\right) &= P(U < \sqrt{n}\varepsilon) \\ &= 1 \ \forall n \geqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Donc la suite de variables aléatoires $\left(-\dfrac{U}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend en probabilité vers la constante 0.
D'après le théorème de Slutsky, il vient donc que la suite $\left(\dfrac{X_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Z_1, de densité $g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x\exp(-\frac{x^2}{2}) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

CONCOURS ECRICOME PREPA

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 10,94 et un écart-type de 5,27, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice d'analyse proposait ici l'étude d'une intégrale impropre, en exprimant sa valeur comme la somme d'une série convergente.
L'exercice était volontairement progressif, les trois premières questions étant classiques et abordables, les dernières questions plus délicates.

1. (a) Cette question a été globalement bien réussie par les candidats maîtrisant leur cours.

   (b) De même, cette question a été généralement bien faite, mais il est dommage de constater que certains candidats ne voient pas que leur tableau de variation contredit les réponses trouvées dans la question précédente. On peut souligner que la plupart des candidats prennent le temps de justifier correctement et efficacement que f et g sont dérivables.

   (c) Cette question a été bien traitée par une large majorité de candidats.

2. (a) La méthodé était similaire à celle de la question 1(c), il fallait préciser que l'intégrale était faussement impropre car $(t \ln t)^n$ admet une limite finie lorsque $t \to 0$. Une légère pénalité était prévue pour les candidats affirmant que cette limite était nulle même lorsque $n = 0$.

   (b) Certains candidats confondent les notions de suite convergente et d'intégrale convergente. Peu de candidats ont finalement l'idée d'encadrer l'intégrale pour déterminer sa limite, et beaucoup veulent directement « passer à la limite sous l'intégrale »....

   (c) Conformément au programme, on attend des candidats qu'ils pratiquent l'intégration par parties sur des intégrales sur un segment puis qu'ils effectuent un passage à la limite.

(d) Cette question délicate n'est traitée que par les bonnes copies. On attendait des candidats qu'ils réalisent au moins une intégration par parties correcte (sur un segment), puis qu'ils itèrent plusieurs fois la formule de récurrence trouvée. Certains candidats maladroits ont tenté une récurrence.

(e) La question a été bien traitée par les candidats sérieusement préparés. Certains candidats affirment que la série $\sum \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ est une série de Riemann. On remarque également des équivalents faux, par exemple $(n+1)^{n+1} \sim n^n$.

(f) Une moitié des copies seulement a abordé cette question informatique, tous pratiquement pensent à utiliser la boucle for. Cette question est valorisée dans le barème.

3. (a) Rares sont les réponses complètes et précises. La formule de Taylor est connue, mais les hypothèses ne sont pas rappelées ou de manière incomplètes. Les vérifications, quand elles sont faites, sont un peu bâclées.

(b) De nombreux candidats ont compris le principe de la solution mais manquent de rigueur.

(c) Bien traité par les candidats ayant abordé la question.

(d) Cette question est peu abordée. La commande while est souvent utilisée, mais peu de candidats ont su utiliser le lien entre `eps` et $\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$.

Exercice 2

Cet exercice mélangeait algèbre linéaire et optimisation de fonctions de plusieurs variables, et offrait de nombreuses questions de cours abordables pour des élèves moyens. Ainsi, les questions 1, 3a, 4a et 4b ont été plébiscitées par la majorité des candidats.

1. (a) De nombreux étudiants disent simplement que la condition à démontrer traduit la diagonalisabilité de J. On attendait ici deux arguments, l'un expliquant que J était diagonalisable, l'autre expliquant pourquoi la transposée de P apparaissait en place de P^{-1}.
Les candidats écrivent souvent « diagonalisable dans une BON ». Nous rappelons que les abréviations, même répandues, ne sont pas forcément familières du correcteur, et il est bon d'écrire en toutes lettres au moins une fois, puis de préciser l'abréviation utilisée par la suite.

(b) Très peu d'étudiants précisent que J n'est pas la matrice nulle, pour affirmer que $\mathrm{rg}(J) = 1$.

(c) Peu d'étudiants citent la propriété suggérée par l'énoncé (deux matrices semblables ont même rang).

2. (a) Bien traitée en général, lorsque les candidats partent de $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$.

(b) Environ une copie sur deux trouve la bonne matrice M.

(c) Bien traité par les candidats ayant répondu à la question précédente.

(d) Plusieurs candidats ne remarquent pas que la matrice P désigne la matrice introduite dans la question 1(a).

(e) Dans beaucoup de copies (et même parmi les bons candidats), on voit le candidat chercher le (ou les) point(s) critique(s) sous la contrainte, alors qu'on attendait l'appel au théorème du cours sur les extrema d'une forme quadratique sur la sphère unité, visiblement peu connu des candidats.

3. (a) Cette question est abordée par la plupart des candidats, et sa résolution était dans ce cas correcte.

(b) La plupart des candidats a rappelé l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui rapportait déjà quelques points. Peu ont abordé véritablement l'inégalité, mais quand elle l'a été, les calculs étaient généralement bien faits.

(c) Peu abordé par les candidats.

4. (a) Bien traitée par de nombreux candidats.

(b) De nombreux candidats gagneraient à savoir que les valeurs propres d'une matrice 2×2 s'obtiennent en résolvant une équation du second degré.

(c) Peu de candidats ont su faire le lien entre les matrices A et A^{-1} et leur forme quadratique respective.

CONCOURS ECRICOME PREPA

Problème

Le problème proposé cette année modélisait une convergence en loi intéressante d'une suite de variables aléatoires discrètes vers une variable à densité, en utilisant le théorème de Slutsky. Le problème était assez long et permettait d'insérer des questions de modélisation informatique. Il était voulu de manière progressive, séparé en parties indépendantes, pour permettre d'une part de départager les candidats, et de permettre à ces derniers de prendre des points sur de nombreuses questions. Les questions ont dans l'ensemble bien abordé les parties A, B, la question C.1, ainsi que la question D.3(a).

Partie A

1. La justification de la continuité de g_a est très souvent erronée. Les candidats ont dans l'ensemble bien vu comment calculer l'intégrale.
2. (a) Cette question de cours est mal traitée. On voit trop souvent la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}a}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

pour donner une densité d'une loi normale, ce qui fausse les calculs pour la suite.

(b) De nombreuses erreurs de calculs.

(c) De nombreuses erreurs de calculs. Il est regrettable de laisser sans commentaires une variance négative, l'erreur de signe était en général due à un non respect des opérations indiquées juste avant dans le calcul.

Partie B

1. Pour la première ligne, on voit très souvent `urnes(choix)<2`. Les candidats ayant déjà compris qu'il fallait regarder une condition sur `urnes(choix)` plutôt que sur `choix` ont été valorisés.
2. Globalement bien traité par les candidats.
3. Globalement bien traité par les candidats. Certains candidats pensent que toute variable aléatoire ne prenant que deux valeurs suit une loi de Bernoulli.
4. (a) Bien traité. On attendait ici surtout une courte justification des valeurs extrêmes de $X_n(\Omega)$.

(b) Lorsque le résultat de la question est donnée, certains candidats se contentent d'expliquer les termes qu'ils voient dans la formule finale. On attendait ici un raisonnement rigoureux avec des événements et application de la formule des probabilités composées. Dans une question délicate de ce type, les points sont décomposés : l'écriture en événements rapporte des points, l'écriture correcte des probabilités composées avec les événements rapporte des points, ...
Certains candidats à l'aise avec le dénombrement ont pu répondre à la question de manière combinatoire.

(c) Ici, il s'agissait de vérifier si les candidats voyaient simplement que la variable aléatoire considérée était finie (ou bornée). Très peu ont finalement compris cette question, et on a vu des études non abouties de convergence absolue de sommes (finies ...).

(d) Très peu de réponses à la deuxième ligne.

Partie C

1. Cette question est dans l'ensemble bien traitée par candidats l'ayant abordée.
2. On attendait explicitement que les candidats vérifient que chaque $\frac{k}{n}$ appartenait à l'intervalle $[0, 1/2]$ pour appliquer la question précédente.
3. Etonnamment, peu de bonnes réponses sur cette question, où il suffisait d'énoncer que la probabilité était toujours nulle dès que $x \leqslant 0$.
4. La question est bien traitée par les bonnes copies.

Partie D

La partie D a été globalement peu abordée par les candidats, hormis les meilleures copies.
Cependant, environ une copie sur trois a abordé la question 3(a) et l'énoncé du Théorème de Slutsly était en général correctement écrit. Ceci montre que les candidats lisent bien le sujet jusqu'au bout pour trouver des points à gagner sur les questions de cours comme celle-ci.
Cette partie permettait l'aboutissement du problème et pourra être reprise à bon escient par les enseignants et les futurs candidats pour s'exercer à des parties plus délicates du programme.