2016

CORRIGÉ

MATHÉMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

VOIE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

OPTION ECONOMIQUE……………….

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

ESPRIT GÉNÉRAL

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A

1. On remarque que $E = \{xA + yB, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(A,B)$.
Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont (A,B) est une famille génératrice. Cette famille est libre car A et B ne sont pas colinéaires. On en déduit que (A,B) est une base de E, et donc $\boxed{\dim(E) = 2}$.

2. Tout d'abord : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   - $$AX = X \iff \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 2z = x \\ -x + 4y - 2z = y \\ 4y - z = z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = 2y \\ x = -y \end{array} \right. \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

     Ainsi, 1 est bien une valeur propre de A et on $E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   - $$AX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 2z = 2x \\ -x + 4y - 2z = 2y \\ 4y - z = 2z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{4y}{3} \\ x = -\frac{2y}{3} \end{array} \right. \iff X = \frac{y}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

     Ainsi, 2 est bien une valeur propre de A et on a $E_2(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   - $$AX = 3X \iff \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 2z = 3x \\ -x + 4y - 2z = 3y \\ 4y - z = 3z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -2y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = y \\ x = -y \end{array} \right. \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

     Ainsi, 3 est bien une valeur propre de A et on a $E_3(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. On choisit une base de vecteurs propres en prenant les trois vecteurs propres précédents:
Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. La formule de changement de base donne :

$$A = PD_AP^{-1} \text{ avec } D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Après calcul, on a :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Calculons : $BX_1 = 0$, $BX_2 = -X_2$ et $BX_3 = -X_3$.
On en déduit que X_1, X_2, X_3 sont également des vecteurs propres pour B (car ils sont bien non nuls). On a donc obtenu une base de vecteurs propres de B : B est diagonalisable dans la même base que A.
Les valeurs propres associées sont $0, -1, -1$. Ainsi :

$$B = PD_BP^{-1} \text{ avec } D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $M(x, y) = xA + yB = xPD_AP^{-1} + yPD_BP^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1}$.
En posant $D(x, y) = xD_A + yD_B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$, on obtient : $M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$ avec $D(x, y)$ qui est diagonale.

7. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \text{ est inversible } &\iff D(x, y) \text{ est inversible} \\ &\iff x \neq 0, 2x - y \neq 0, 3x - y \neq 0 \end{aligned}$$

8. Calculons :

$$\begin{aligned} B^2 &= PD_BP^{-1}PD_BP^{-1} \\ &= PD_B^2P^{-1} \\ &= P(-D_B)P^{-1} \\ &= -B \end{aligned}$$

Comme E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on en déduit que $-B \in E$ donc $\boxed{B^2 \in E}$.
De la même façon, $A^2 = PD_AP^{-1}$

$$\begin{aligned} A^2 \in E &\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, A^2 = M(x, y) \\ &\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, D_A^2 = D(x, y) \\ &\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 1 = x \\ 4 = 2x - y \\ 9 = 3x - y \end{cases} \\ &\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 1 = x \\ y = -2 \\ y = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système n'a pas de solution : $\boxed{A^2 \notin E}$.

Partie B

1. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = CX_n$ avec $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} = M(1, 3)$.

3. Pour $n = 0$, on a $C^0 = I_3$, donc on a bien $X_0 = C^0 X_0$.
Pour $n \geqslant 0$, supposons qu'on ait $X_n = C^n X_0$. Alors $X_{n+1} = CX_n = C \times C^n X_0 = C^{n+1} X_0$.
Par récurrence, on a donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = C^n X_0$.
4. On obtient alors, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} X_n &= C^n X_0 = (PD(1,3)P^{-1})^n X_0 = PD(1,3)^n P^{-1} X_0 \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2(-1)^n & 0 \\ -1 & 3(-1)^n & 0 \\ -2 & 4(-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n \\ -1+3(-1)^n \\ -2+4(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit :

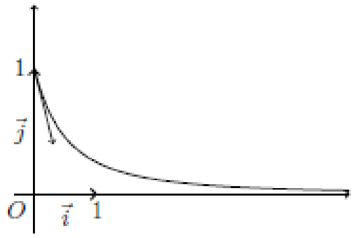
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n = 1 - 2(-1)^n \\ b_n = -1 + 3(-1)^n \\ c_n = -2 + 4(-1)^n \end{cases}}$$

La formule n'est pas valable pour $n = 0$.

EXERCICE 2

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}_+,\ g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
   - g_0 est continue sur son ensemble de définition.
   - g_0 est décroissante comme composée d'une fonction croissante ($x \mapsto (x+1)^2$) et d'une fonction décroissante ($u \mapsto 1/u$).
   - $g_0(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0^+$.
   - g_0 est dérivable et $g_0'(0) = -2$. L'équation de la tangente en 0 est donc $y = -2x + 1$.
   -

x	0	$+\infty$
$g_0(x)$	1 ↘	0



   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. g_n est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
   On obtient pour $x \geqslant 0$: $g_n'(x) = \dfrac{n(\ln(1+x))^{n-1} - 2(\ln(1+x))^n}{(1+x)^3}$.
   Comme $\dfrac{(\ln(1+x))^{n-1}}{(1+x)^3} \geqslant 0$, on a : $\boxed{g_n'(x) \geqslant 0 \iff n \geqslant 2\ln(1+x).}$
   Ainsi : g_n est croissante sur $[0, e^{n/2} - 1]$ et décroissante sur $[e^{n/2} - 1, +\infty[$.
   De plus, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{(\ln(X))^n}{X^2} = 0$ par croissances comparées.

(c) Traçons le tableau de variation de g_n :

x	0		$e^{n/2}-1$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

On obtient donc un maximum en $e^{n/2}-1$ et $M_n = g_n(e^{n/2}-1) = \dfrac{(n/2)^n}{(e^{n/2})^2} = \boxed{\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n}$.

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$:

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n = \exp\left(n\ln\frac{n}{2e}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{+\infty}$$

(d)

$$\frac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = g_n(x).x^{3/2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln(x+1))^n}{(x+1)^2} \times (x+1)^{3/2} = \frac{(\ln(x+1))^n}{(x+1)^{1/2}}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x+1))^n}{(x+1)^{1/2}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(\ln X)^n}{X^{1/2}} = 0$ par croissance comparée.

On en déduit que : $\boxed{g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)}$.

2. (a) Etudions I_0 . Soit $A \geqslant 0$.

$$\int_0^A g_0(x)\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, I_0 est convergente et $\boxed{I_0 = 1}$.

(b) • g_n est une fonction continue et positive.

• $g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

• $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ est convergente.

On en déduit : $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$ est convergente et donc $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$ aussi.

(c) Soit $A \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^A g_{n+1}(x)\mathrm{d}x &= \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{1+x}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \text{ par IPP}\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient : $\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n}$.

(d) On a bien $I_0 = 1 = 0!$.
De plus, si on suppose $I_n = n!$, alors $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)!$.
Ainsi, par récurrence on a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$.

3. (a)
- f_n est positive sur $\mathbb{R}$.
- f_n est continue sauf éventuellement en 0.
- D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 1 d'une part, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 0 d'autre part, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

Donc f_n est bien une densité de probabilité.

(b) X_n admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Or, pour $x \geqslant 0$, $|xf_n(x)| = \dfrac{x(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln(1+x))^n}{x}$. Or, à partir de $x \geqslant e-1$, on a $\ln(1+x) \geqslant 1$, donc lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{(\ln(1+x))^n}{x} \geqslant \dfrac{1}{x}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ est divergente donc par critère de comparaison puis d'équivalence pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |xf_n(x)|\mathrm{d}x$ est divergente. On en déduit que X_n n'admet pas d'espérance.

(c) Soit $x < 0$ et $n \geqslant 0$, on a $F_n(x) = 0$.

(d) Soit $x \geqslant 0$. On a : $\boxed{F_0(x) = \dfrac{x}{1+x}}$.

(e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

$$F_k(x) = \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^k}{k!(1+t)^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{(\ln(1+t))^k}{k!(1+t)}\right]_0^x + \int_0^x \frac{k(\ln(1+t))^{k-1}}{k!(1+t)^2}\mathrm{d}t = -\frac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)} + F_{k-1}(x)$$

Donc : $\boxed{F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\dfrac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)}}$

(f) En sommant, les relations précedentes pour k allant de 1 à n, on obtient :

$F_n(x) - F_0(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} -\frac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)}$ d'où $\boxed{F_n(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)} + 1}$

(g) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{(\ln(1+x))^i}{i!} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(\ln(1+x)) = 1+x$. Donc $F_k(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1+1 = 0$.
Pour $x < 0$, on a $F_k(x) = 0 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(h) Comme la fonction $x \mapsto 0$ n'est pas une fonction de répartition, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi.

4. (a) Comme X_n prend ses valeurs sur $\mathbb{R}^+$, $Y_n = \ln(1+X_n)$ est bien définie et prend ses valeurs sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Par le théorème de transfert, Y_n admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1+x)f_n(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. On a :
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \ln(1+x)f_n(x)\mathrm{d}x = 0$ car f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$.
- $$\int_0^{+\infty} |\ln(1+x)f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{n!(1+x)^2}\mathrm{d}x = (n+1)\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x = \boxed{n+1}$$

Ainsi $E(Y_n)$ existe et $\boxed{E(Y_n) = n+1}$.

(c) Y_n admet une variance si et seulement si Y_n admet un moment d'ordre 2. Par le théorème de transfert, Y_n admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\ln(1+x))^2 f_n(x)\mathrm{x}$ est absolument convergente.
On a :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \ln(1+x)^2 f_n(x)\mathrm{x} = 0$ car f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$.
-

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |\ln(1+x)^2 f_n(x)|\mathrm{x} &= \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^{n+2}}{n!(1+x)^2}\mathrm{x}\\ &= (n+1)(n+2)\int_0^{+\infty} f_{n+2}(x)\mathrm{x}\\ &= \boxed{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Ainsi $E(Y_n^2)$ existe et $E(Y_n^2) = (n+2)(n+1)$.
On en déduit que $V(Y_n) = E(Y_n^2) - (E(Y_n))^2 = \boxed{(n+1)}$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}H_n(x) &= P(Y_n \leqslant x)\\ &= P(\ln(1+X_n) \leqslant x)\\ &= P(X_n \leqslant e^x - 1) \text{ car exp est croissante.}\\ &= F_n(e^x - 1)\end{aligned}$$

(e) D'après l'expression précédente de H_n , on en déduit que H_n est continue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Donc Y_n est à densité et obtient une densité de Y_n par dérivation :

$$h_n(x) = \begin{cases} e^x \times f_n(e^x - 1) = \dfrac{e^{-x}x^n}{n!} & \text{si } x \geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

(f) La densité de Y_0 est :

$$h_0(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On reconnaît la loi exponentielle de paramètre 1. Sous réserve de convergence, le moment d'ordre k de Y_0 est donné par :

$$\begin{aligned}E(Y_0^k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k h_0(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} k!h_k(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} k!h_k(x)\mathrm{d}x\\ &= \boxed{k!}\end{aligned}$$

EXERCICE 3

Résultats préliminaires

1. Montrons que X et Y sont échangeables. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} P([X=i]\cap[Y=j]) &= P([X=i])P([Y=j]) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= P([X=j])P([Y=j]) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi.} \\ &= P([X=j]\cap[Y=i]) \text{ par indépendance} \end{aligned}$$

Ainsi, X et Y sont échangeables.

2. Montrons que X et Y ont la même loi. Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(X=i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P([X=i]\cap[Y=j]) \text{ car } (Y=j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est un SCE} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} P([X=j]\cap[Y=i])\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont échangeables} \\ &= P(Y=i) \text{ car } (X=j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est un SCE} \end{aligned}$$

Ainsi, X et Y ont même loi.

Étude d'un exemple

3. (a)

```
function res = tirage ( b , n )
        r = rand( )
        if r< b/(b+n) then
                res = 2
        else
                res = 1
        end
endfunction
```

(b)

```
function [ x , y]= experience ( b , n , c , variante )
        x = tirage ( b , n )
        if variante == 1 then
                if x == 1 then
                        n = n+c
                else
                        b = b+c
                end
        else if variante == 2 then
                if x== 1 then
                        b=b+c
                else
                        n=n+c
                end
        y = tirage ( b , n )
endfunction
```

(c)

```
function [ loiX , loiY , loiXY ]= estimation ( b , n , c , variante , N )
        loiX = [ 0 , 0 ]
        loiY = [ 0 , 0 ]
        loiXY = [ 0 , 0 ; 0 , 0 ]
        for k =1:N
                [ x , y]= experience ( b , n , c , variante )
                loiX ( x ) = loiX ( x )+1
                loiY ( y ) = loiY ( y )+1
                loiXY ( x , y )= loiXY ( x , y )+1
        end
        loiX = loiX /N
        loiY = loiY /N
        loiXY = loiXY /N
endfunction
```

(d) • Pour la variante 1, il semble que X et Y soit échangeables, non indépendantes.

• Pour la variante 2, il semble X et Y soient ni échangeables, ni indépendantes.

• Pour la variante 3, il semble que X et Y soient échangeables et indépendantes.

4. (a) D'après le protocole de l'expérience, on a : $P(X=1)=\dfrac{n}{n+b}$ et $P(X=2)=\dfrac{b}{n+b}$.

(b) • $P(X=1\cap Y=1)=P(X=1).P_{X=1}(Y=1)=\dfrac{n}{b+n}.\dfrac{n+c}{b+n+c}$.

• $P(X=1\cap Y=2)=P(X=1).P_{X=1}(Y=2)=\dfrac{n}{b+n}.\dfrac{b}{b+n+c}$.

• $P(X=2\cap Y=1)=P(X=2).P_{X=2}(Y=1)=\dfrac{b}{b+n}.\dfrac{n}{b+n+c}$.

• $P(X=2\cap Y=2)=P(X=2).P_{X=2}(Y=2)=\dfrac{b}{b+n}.\dfrac{b+c}{b+n+c}$.

(c)

$$\begin{aligned}P(Y=1)&=P(Y=1\cap X=1)+P(Y=1\cap X=2)\\&=\frac{n}{b+n}.\frac{n+c}{b+n+c}+\frac{b}{b+n}.\frac{n}{b+n+c}=\frac{n(n+c+b)}{(n+b)(b+n+c)}=\frac{n}{b+n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Y=2)&=P(Y=2\cap X=1)+P(Y=2\cap X=2)\\&=\frac{n}{b+n}.\frac{b}{b+n+c}+\frac{b}{b+n}.\frac{b+c}{b+n+c}=\frac{b(n+c+b)}{(n+b)(b+n+c)}=\frac{b}{b+n}\end{aligned}$$

(d) On remarque donc : $P(X=1\cap Y=2)=\dfrac{n}{b+n}\dfrac{b}{b+n+c}=P(X=2\cap Y=1)$.

Ainsi, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont échangeables.}}$

Par ailleurs, $P(X=1\cap Y=1)=\dfrac{n}{b+n}.\dfrac{n+c}{b+n+c}$

et $P(X=1)P(Y=1)=\left(\dfrac{n}{b+n}\right)^2$. Résolvons :

$$\begin{aligned}
\frac{n}{b+n}.\frac{n+c}{b+n+c}=\left(\frac{n}{b+n}\right)^2 &\iff \frac{n+c}{b+n+c}=\frac{n}{b+n}\\
&\iff (n+c)(b+n)=n(b+n+c)\\
&\iff nb+n^2+cb+cn=nb+n^2+nc\\
&\iff cb=0\\
&\iff c=0 \text{ ou } b=0
\end{aligned}$$

Or ceci est exlu par hypothèse. Ainsi $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, près des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,00 et un écart-type de 5,71, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice d'algèbre linéaire avait pour but d'étudier un ensemble de matrices codiagonalisables, puis de l'appliquer à l'étude de trois suites récurrentes linéaires imbriquées. Il permettait de vérifier la bonne maîtrise des concepts d'algèbre au programme, et les premières questions ont été dans l'ensemble traitées par la plupart des candidats.
Il est regrettable que les candidats ne lisent pas vraiment l'énoncé des questions, et parfois se lancent dans des calculs longs et compliqués, alors même que des méthodes plus adéquates auraient été préférables s'ils avaient pris la peine de bien lire la question posée, par exemple pour la question 2 de la partie A.

Partie A

1. Cette première question a dans l'ensemble été malmenée par les candidats. Sa résolution n'étant pas indispensable pour la suite de l'exercice, cela n'a pas forcément gêné les candidats pour la suite du sujet. La majorité des candidats a souhaité démontrer la caractérisation des sous-espaces vectoriels par la stabilité par combinaison linéaire, souvent confondue avec la « linéarité », mais sans toutefois aboutir. Néanmoins, lorsque les candidats avaient établi une famille génératrice de E, ils sont alors bien enclins à vérifier la liberté de la famille pour achever la question.
2. Beaucoup de candidats ont cherché à trouver les valeurs propres de la matrice en étudiant la matrice $A - \lambda I$, alors même que le résultat était donné dans l'énoncé ; cela a souvent donné lieu à de nombreux calculs, souvent erronés.
   Il est toujours regrettable que les candidats n'arrivent pas à formuler clairement les conditions suffisantes de diagonalisation d'une matrice.

3. Question bien abordée par une majorité de candidats. Il est dommage que la condition sur la première ligne ait amené parfois à des erreurs de calculs, par exemple la colonne propre $(-1, 1, 2)$ devenant $(1, -1, 2)$.
4. Les candidats utilisent souvent une méthode de résolution de système comme attendu dans le problème. Certains candidats appliquent la méthode de Gauss-Jordan, mais se perdent dans leurs calculs sans forcément aboutir même en cas de bon démarrage. La matrice P étant souvent fausse, les calculs de P^{-1} devenaient alors compliqués.
5. Les calculs des BX_i sont souvent réalisés, sans être forcément interprétés. Peu de candidats ont fait le lien avec la question 2 en mentionnant que la famille de vecteurs était libre (et non pas uniquement car il s'agissait de vecteurs propres).
6. Peu de candidats abordent la question, et dans ce cas répondent de manière assez confuse sans raisonnement réellement abouti.
7. Le lien entre les matrices $M(x, y)$ et $D(x, y)$ n'est pas exploité. Une part non négligeable de candidats indique que les coefficients diagonaux de la matrice $M(x, y)$ doivent être non nuls.
8. De nombreux candidats ont traité cette question, même sans avoir traité les précédentes. Ils ont calculé avec succès les matrices A^2 et B^2, puis ont tenté de les écrire sous la forme $M(x, y)$ en justifiant si cela était possible ou non.

Partie B

2. La majorité des candidats trouve la matrice C, puis posent un système linéaire pour trouver les réels x et y demandés, mais peu raisonnenent pas équivalence en justifiant que $(x, y) = (1, 3)$ convient pour toutes les équations.
3. Les candidats ont pour la plupart raisonné par récurrence, et la rédaction était correcte en général.
4. La question est peu abordée, découlant des résultats de la partie A. Des candidats ont compris néanmoins l'idée et ont écrit l'égalité $M(x, y) = P(D(x, y))^n P^{-1}$.

Exercice 2

Cet exercice mêlant Analyse et Probabilités avait pour but d'étudier une suite de variables aléatoires à densité. L'exercice était plutôt long et de niveau plus difficile et demandait du temps aux candidats désireux de l'aborder entièrement. Les résultats étaient donnés dans le sujet pour les questions plus délicates, ce qui permettait d'avancer sereinement dans l'exercice en admettant certains résultats.
L'exercice a mis en valeur des problèmes de calculs en analyse, souvent dûs à un manque de rigueur. Les candidats qui ont fait l'effort de bien apprendre leur cours pouvaient tout à fait gagner des points en appliquant les bonnes démarches, même sans forcément les aboutir.

1. (a) La dérivée de la fonction n'est pas toujours correcte, les étudiants confondant $-\dfrac{2x+2}{(x+1)^4}$ et $\dfrac{-2x+2}{(x+1)^4}$, ce qui a amené certains à des variations fausses.
   La limite était souvent correcte, de même pour l'équation de la tangente (dont l'orthographe est malheureusement souvent baffouée). Il est malheureux que certaines courbes laissaient penser à une asymptote verticale en $x = 0$.
   (b) Même si beaucoup de candidats mentionnent la dérivabilité par opérations, il est attendu des candidats qu'ils énoncent précisément qu'on a affaire à un quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais.
   La dérivée était difficile à calculer, dûe à la présence d'une composée multiple, mais plusieurs s'en sortent convenablement. Le résultat étant donné pour les variations, certains candidats ont pu avancer lorsqu'ils savaient résoudre l'inéquation présente dans l'énoncé.
   La limite n'a pas été étudiée très rigoureusement. Les meilleurs candidats l'ont quand même fait

souvent par changement de variable. Les étudiants utilisant l'équivalent $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$ qui n'est pas explicitement au programme, n'ont pas obtenu la totalité des points s'ils ne justifiaient pas cet équivalent.

(c) Le calcul du maximum a été correct dans les copies qui avaient répondu correctement à la question (b). Pour la limite, les candidats ont cru souvent reconnaître une expression du type q^n avec q réel fixé. Il était attendu des candidats un passage à l'écriture exponentielle avant de conclure.

(d) La méthode est bien connue par les candidats (à savoir montrer que le quotient tend vers 0), mais sa mise en oeuvre a été peu réalisée.

2. (a) La continuité est souvent oubliée. Là-encore on peut regretter que beaucoup de candidats ne lisent pas la question en entier avant de l'aborder : certains ont démontré la convergence avec un critère de comparaison, puis ont calculé l'intégrale, alors même que l'intitulé complet de la question aurait pu les guider vers une méthode plus rapide.

(b) Les intégrales de Riemann sont mal maîtrisées en ce qui concerne les bornes, un nombre non négligeable de copies indique que « $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ converge ».
Le critère de négligeabilité n'est pas souvent bien énoncé, la positivité des fonctions en vigueur n'est pas mentionnée, au mieux on cite un « critère de comparaison ».

(c) Il est rappelé que toute intégration par parties doit être réalisée sur une intégrale sur un segment d'après le programme. Les rares candidats réalisant une intégration par parties sur une intégrale généralisée directement n'obtiennent aucun point à la question.
Il est regrettable que même si certains candidats comprennent la nécessité de se ramener à un segment, ils confondent alors $I_{n+1} = [\dots]_0^A - \int_0^A \dots$

(d) Question bien abordée par une majorité de candidats, souvent par récurrence.

3. (a) Question bien abordée par une majorité de candidats. Les définitions sont bien connues.

(b) Les candidats ont souvent la bonne démarche et étudient la convergence (absolue) de la bonne intégrale.
Très peu ont su aller au bout du raisonnement.

(c) Réponse souvent donnée sans justification.

(d) Certains candidats ont confondu les intégrale $\int_0^{+\infty}$ et $\int_0^x$.

(e) Cette question difficile a été résolue uniquement par certains rares candidats.

(f) Suivant l'indication de l'énoncé, certains candidats ont compris qu'il fallait sommer la relation précédente, même sans avoir répondu à la question (e).

(g) Très peu abordée.

(h) Très peu abordée.

4. (a) Certains candidats confondent les variables discrètes et continues, il n'a donc pas été rare de voir que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Question bien traitée par les candidats l'ayant abordée.

(c) Question bien traitée par les candidats l'ayant abordée.

(d) Cette question a été abordée par un grand nombre de candidat, et a été globalement bien faite, même par des candidats de niveau faible.

(e) La régularité de la fonction H_n n'a pas été justifiée lorsqu'elle était mentionnée. Les candidats ont dans l'ensemble bien compris comment obtenir une densité de Y_n en dérivant H_n.

(f) La loi est reconnue par sa fonction de répartition dans très peu de copies.

Exercice 3

Ce troisième exercice a souffert de sa position dans le sujet et a été très peu abordé par les candidats, alors même qu'il était plutôt court. Les candidats ont sans doute manqué de temps après le deuxième exercice, ou été surpris par les questions d'informatique.
Rappelons encore une fois que l'informatique représente une part non négligeable du programme des deux années de classes préparatoires. Les questions proposées dans les sujets sont souvent élémentaires et bien rémunérées lors de la correction, ce qui doit encourager tout candidat à aborder les parties du sujet portant sur les connaissances en Scilab. Il n'a pas été rare de voir des candidats de niveau plutôt moyen par ailleurs aborder l'exercice 3 raisonnablement, leur faisant ainsi augmenter considérablement leur note finale.

1. Cette question est souvent abordée par les candidats, mais peu ont bien compris les définitions proposées par l'énoncé, ou encore confondent les indices i et j dans leurs calculs.
2. La formule des probabilités totales est souvent évoquée, mais pas souvent écrite convenablement, les candidats utilisant souvent des systèmes complets d'événements finis.
3. (a) Les candidats ont souvent l'idée d'écrire $< r \leqslant \dots >$ mais le membre de droite n'est pas forcément correct.
   (b) Les candidats ayant pris peine de comprendre la modélisation proposée par l'exercice ont su correctement répondre à cette question et ont alors gagné des points.
   (c) La ligne pour `loiY` est faite correctement mais peu ont compris la dernière ligne.
   Il y avait une erreur d'énoncé dans le sujet original (rectifiée dans le rapport) dans l'écriture de la matrice `loiXY`, erreur qui a peu perturbé les candidats, la plupart ayant rectifié d'eux-mêmes sur leur copie.
   (d) Les candidats ayant abordé la question l'ont fait avec succès, sans forcément justifier leurs résultats, sûrement par manque de temps.
4. Les candidats ayant traité cette question l'ont souvent fait avec succès, au moins pour les questions (a), (b), (c).