CORRIGÉ

Corrigé de l'épreuve

Exercice 1

1. (a) • Soient $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)'' - 2X(\lambda P+Q)' \\ &= \lambda P'' + Q'' - 2X(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda P'' - 2X\lambda P' + Q'' - 2XQ' \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

L'application φ est donc bien linéaire.

• Pour tout élément P de E, P'' est un polynôme de degré au plus $n-2$ et P' un polynôme de degré au plus $n-1$. Donc $2XP'$ est aussi un polynôme de degré au plus n, et alors $\varphi(P)$ est une combinaison linéaire de deux éléments de E, donc $\varphi(P) \in E$.

Ainsi, φ est bien un endomorphisme de E.

(b) Déterminons l'image par φ de chaque élément de la base canonique de E.
On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = -2X$, puis pour tout entier $k \in [\![2,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\varphi(X^k) &= k(k-1)X^{k-2} - 2XkX^{k-1} \\ &= -2kX^k + k(k-1)X^{k-2}\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice associée à φ dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -4 & \ddots & k(k-1) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -2k & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -2n \end{pmatrix}$$

(c) M étant une matrice triangulaire (supérieure), ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, à savoir $0, -2, \dots, -2k, \dots, -2n$, qui sont deux à deux distinctes. Donc M est une matrice carrée de taille $n+1$ qui admet $n+1$ valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.
L'endomorphisme φ étant représenté par M, il vient que φ est également diagonalisable et ses valeurs propres sont les mêmes que celles de M : $\{-2k,\ k \in [\![0,n]\!]\}$.

2. (a) Soit $(P,Q) \in E$. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ converge.

• L'application $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions continues. On a des problèmes d'intégration au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

• De plus, au voisinage de $+\infty$, on a (par croissances comparées usuelles) :

$$P(t)Q(t)e^{-t^2/2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{avec } \frac{1}{t^2} \geqslant 0 \text{ au vois. de } +\infty.$$

CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

- Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge, par critère de négligeabilité par rapport à une fonction positive, l'intégrale $\int_1^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2/2}dt$ converge.
- On montrerait de manière similaire (ou à l'aide d'un changement de variable $u = -t$) que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} P(t)Q(t)e^{-t^2/2}$ converge.

Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ converge et $< P, Q >$ est bien défini.

(b) • φ est symétrique car :

$$\forall P, Q \in E, \quad < P, Q >= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t^2}dt =< Q, P >$$

- φ est linéaire à droite car : $\forall P, Q, R \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} < P, \lambda Q + R > &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\big(\lambda Q(t) + R(t)\big)e^{-t^2}dt \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t^2}dt \\ &= \lambda < P, Q > + < P, R > \end{aligned}$$

et donc φ est bilinéaire puisque symétrique.
- φ est positive car : $\forall P \in E$,

$$< P, P >= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2}dt \geqslant 0$$

(car $t \mapsto P(t)^2e^{-t^2}$ est positive sur $]-\infty, +\infty[$)
- Montrons que φ est définie positive.
Supposons qu'il existe $P \in E$ tel que $< P, P >= 0$, alors (la fonction $t \mapsto P(t)^2e^{-t^2}$ étant continue et positive sur $]-\infty, +\infty[$), on obtient : $\forall t \in \mathbb{R}, P(t)^2e^{-t^2} = 0$, et donc $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = 0$, P est donc le polynôme nul.

Finalement, on a bien montré que φ est un produit scalaire sur E.

3. Soient P et Q deux éléments de E. Montrons que $< \varphi(P), Q >=< P, \varphi(Q) >$.
Soient a et b deux réels. Alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}dt &= \int_a^b \big(P''(t)e^{-t^2} - 2tP'(t)e^{-t^2}\big)Q(t)dt \\ &= \int_a^b u'(t)Q(t)dt \quad \text{avec } u(t) = P'(t)e^{-t^2} \\ &= \Big[u(t)Q(t)\Big]_a^b - \int_a^b P'(t)Q'(t)e^{-t^2/2}dt \\ &= P'(b)Q(b)e^{-b^2} - P'(a)Q(a)e^{-a^2} - \int_a^{+b} P'(t)Q'(t)e^{-t^2/2}dt \end{aligned}$$

En faisant tendre $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$, les deux premiers termes ayant une limite nulle par croissances comparées, et les intégrales obtenues étant bien convergentes, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P)(t)Q(t)e^{-t^2}dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}dt$$

donc (en faisant de même en échangeant P et Q), on obtient :

$$< \varphi(P), Q >= -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}dt =< P, \varphi(Q) >$$

et donc φ est symétrique pour ce produit scalaire.

4. (a) Une récurrence simple assure que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est bien défini et de degré k. La famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est donc une famille de polynômes échelonnée en degré, elle est donc libre. Comme d'autre part elle comporte $n+1$ vecteurs, c'est une base de E. Reste à prouver qu'elle est orthogonale. Montrons par récurrence sur k la propriété suivante :

$$\forall k \geqslant 1,\ \mathcal{P}(k)\ : « P_k \text{ est orthogonal à } P_0, P_1, \ldots, P_{k-1} »$$

- La propriété est vraie pour $k = 1$:

$$\begin{aligned} < P_1, P_0 > &=< X - \frac{< P_0, X >}{< P_0, P_0 >}P_0, P_0 > \\ &=< X, P_0 > - \frac{< P_0, X >}{< P_0, P_0 >} < P_0, P_0 > \\ &=< X, P_0 > - < X, P_0 > \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Supposons la propriété vraie pour $1, 2, \ldots, k$ (avec $k < n$) et montrons qu'elle est aussi vraie au rang $k+1$. Soit $j \in [\![0, k]\!]$.

$$\begin{aligned} < P_{k+1}, P_j > &=< X^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{< P_i, X^{k+1} >}{< P_i, P_i >}P_i, P_j > \\ &=< X^{k+1}, P_j > - \sum_{i \in [\![0,k]\!] \setminus \{j\}} \frac{< P_i, X^{k+1} >}{< P_i, P_i >} \underbrace{< P_i, P_j >}_{=0} - \frac{< P_j, X^{k+1} >}{< P_j, P_j >} < P_j, P_j > \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Donc la propriété est vraie pour $k+1$.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et donc la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est orthogonale.

(b) Observons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par φ (de la même manière qu'on a montré à la question 1(a) que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ).
Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(P_k) \in \mathbb{R}_k[X]$.
De plus la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$, donc il existe des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ tels que :

$$\varphi(P_k) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i P_i$$

Pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, on a alors :

$$< \varphi(P_k), P_i >= \alpha_i < P_i, P_i >$$

Mais d'autre part, φ étant symétrique pour le produit scalaire étudié :

$$< \varphi(P_k), P_i >=< \varphi(P_i), P_k >= 0$$

(Puisque $\varphi(P_i) \in \mathbb{R}_i[X]$, il est orthogonal à P_k).
Il vient donc que $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $\alpha_i = 0$.
Il reste donc que $\varphi(P_k) = \alpha_k P_k$, et donc P_k est vecteur propre de φ.

Exercice 2

1. (a) Observant que 1 est racine double évidente de P, on factorise sans peine :
$$P(X) = (X-1)^2(2X+1)$$

   (b) Combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I, u est elle aussi dérivable sur I : $\forall x \in I$,
$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{3}\left(2\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}\right) - 1 \\ &= \frac{2\cos^3(x) + 1 - 3\cos^2(x)}{3\cos^2(x)} \\ &= \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)} \end{aligned}$$

   (c) $u'(x)$ est du signe de $P(\cos(x)) = (\cos(x)-1)^2(2\cos x + 1)$. Or, $\cos(x) > 0$ lorsque $x \in I$, donc $u'(x)$ est toujours strictement positif lorsque $x \in I$. La fonction u est donc strictement croissante sur I.

   (d) v est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables (avec le dénominateur qui ne s'annule pas sur I). De plus,$\forall x \in I$,
$$\begin{aligned} v'(x) &= 1 - \frac{3\cos(x)(2+\cos(x)) - (-\sin(x))3\sin(x)}{(2+\cos(x))^2} \\ &= \frac{(2+\cos(x))^2 - 3\cos(x)(2+\cos(x)) - 3(1-\cos^2(x))}{(2+\cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos^2(x) - 2\cos(x) + 1}{(2+\cos(x))^2} \\ &= \frac{Q(\cos(x))}{(2+\cos(x))^2} \qquad \text{avec } Q(X) = (X-1)^2 \end{aligned}$$

   (e) Pour tout $x \in I$ on a $|\cos(x)| < 1$ et donc $Q(\cos(x)) > 0$.
   Donc v est strictement croisssante sur I.

   (f) u et v sont continues et strictement croissantes sur I. De plus elles tendent toutes les deux vers 0 en 0. Elles sont donc toutes les deux strictement positives sur I, c'est à dire que :
$$\forall x \in I,\ f(x) > x \text{ et } x > g(x)$$
   D'où l'encadrement attendu.

2. (a)
$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\\ &= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

(b) Appliquant l'encadrement du **1.(f)** avec $x = \dfrac{\pi}{12}$, il vient :

$$\frac{3\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{2+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} < \frac{\pi}{12} < \frac{1}{3}\left(2\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{8-4\sqrt{3}}{4}\right)$$

Et donc :

$$36\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}} < \pi < 2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+8-4\sqrt{3}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos(\theta+\theta)\\ &= \cos(\theta)\cos(\theta)-\sin(\theta)\sin(\theta)\\ &= (1-\sin^2(\theta))-\sin^2(\theta)\\ &= 1-2\sin^2(\theta)\end{aligned}$$

Appliquant la relation précédente avec $\theta = \dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}$, il vient que :

$$b_n = 1-2a_{n+1}^2$$

Puisque $\dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, son sinus est positif, et donc :

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}$$

De même le cosinus de $\dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}$ est positif, donc :

$$b_{n+1} = \sqrt{1-a_{n+1}^2} = \sqrt{1-\frac{1-b_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}$$

(b) Appliquant l'encadrement du **1.(f)** avec $x = \dfrac{\pi}{3\times 2^n}$ il vient :

$$\frac{3a_n}{2+b_n} < \frac{\pi}{3\times 2^n} < \frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{a_n}{b_n}\right)$$

C'est à dire :

$$9\times 2^n\frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n+\frac{a_n}{b_n}\right)$$

(c) Puisque $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{3\times 2^n}$.
De plus $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc :

$$9\times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 9\times 2^n \frac{\frac{\pi}{3\times 2^n}}{3} = \pi$$

Et :

$$2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right) = 2^n a_n\left(2+\frac{1}{b_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{3}(2+1) = \pi$$

Donc les deux termes de l'encadrement tendent vers π lorsque n tend vers $+\infty$..

(d) On calcule les valeurs successives des a_n et b_n jusqu'à ce que l'écart entre les deux termes de l'encadrement soit inférieur à $2e$ et on retourne la moyenne de ces deux termes en guise d'approximation de π :

```
function [x,k]=h(e)
    k = 0
    a = sqrt(3) / 2
    b = 1/ 2
    while(2*a+a/b)*2^k-9*2^k*a/(2+b) > 2*e
        a = sqrt((1-b)/2)
        b = sqrt((1+b)/2)
        k = k + 1
    end
    x = ( (2*a+a/b)*2^k+9*2^k*a/(2+b) )/2
endfunction
```

(e) On fait appel à la fonction h définie ci-dessus pour connaitre le nombre d'itérations nécessaires pour chaque précision.

```
function V =  nb_iterations(p)
    for k = 1 : p
        [x,V(k)] = h(10^(-k))
    end
endfunction
```

(f) Jusqu'à $p = 16$, le nombre d'itérations nécessaires semble augmenter linéairement en fonction de p. La précision de l'algorithme semble donc exponentielle.
A partir de $p = 16$, le nombre d'itérations retourné est constant, égal à 13. A la treizième itération, la différence entre les deux termes de l'encadrement devient si petite que Scilab n'a pas assez de décimales pour distinguer ces deux termes. Pour Scilab cette différence devient donc nulle à la treizième itération, et elle est déclarée inférieure à n'importe quel 10^{-p}.

Problème

Partie A

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(Y_n \leqslant x) &= P(\text{Min}(X_1, \dots, X_n) \leqslant x) \\ &= 1 - P(\text{Min}(X_1, \dots, X_n) > x) \\ &= 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap \dots \cap (X_n > x)) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) \text{ (par indépendance)} \\ &= 1 - (1 - F(x))^n \end{aligned}$$

2. Puisque X admet une densité, sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Alors F_n est également continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Donc Y_n admet une densité f_n, qui est la dérivée de F_n (pour les valeurs en lesquelles cette dérivée existe) :

$$f_n(x) = F_n'(x) = nF'(x)(1 - F(x))^{n-1} = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}$$

3. (a) Procédons à une intégration par parties. On note :

$$\forall t \in [0, x], \quad \left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = 1 \end{array} \right. , \qquad \left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = \Phi(t) - 1 \end{array} \right.$$

Comme φ est supposée continue sur $[0, +\infty[$, les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x t\varphi(t)dt &= \Big[t(\Phi(t) - 1)\Big]_0^x - \int_0^x (\Phi(t) - 1)dt \\ &= x(\Phi(x) - 1) - \int_0^x (\Phi(t) - 1)dt \\ &= \int_0^x (1 - \Phi(t))dt - x(1 - \Phi(x)) \end{aligned}$$

(b) Puisque V admet une espérance, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)dt$ est convergente. Alors :

$$0 \leqslant x(1 - \Phi(x)) = x\int_x^{+\infty} \varphi(t)dt = \int_x^{+\infty} x\varphi(t)dt \leqslant \int_x^{+\infty} t\varphi(t)dt \quad \text{(car cette intégrale converge)}$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)dt$ converge, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} t\varphi(t)dt = 0$. Ainsi, par encadrement $x(1 - \Phi(x))$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

D'après la question (a) :

$$\int_0^x (1 - \Phi(t))dt = \int_0^x t\varphi(t)dt + x(1 - \Phi(x))$$

Et donc :

$$\int_0^x (1 - \Phi(t))dt \xrightarrow{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} t\varphi(t)dt$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))dt$ est convergente, et elle vaut $E(V)$.

(c) Pour tout $x \geqslant 0$, on a $x(1-\Phi(x)) \geqslant 0$, et donc $\forall x \geqslant 0$,

$$\int_0^x t\varphi(t)dt \leqslant \int_0^x (1-\Phi(t))dt$$

La fonction $t \mapsto (1-\Phi(t))$ étant positive, il vient :

$$\int_0^x t\varphi(t)dt \leqslant \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))dt$$

La fonction $t \mapsto t\varphi(t)$ étant positive, la fonction $x \mapsto \int_0^x t\varphi(t)dt$ est croissante.
Comme on vient de voir qu'elle est majorée, elle admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, c'est à dire que V admet une espérance.

(d) On a vu à la question (b) que si V admet une espérance, alors $\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))dt$ est convergente.
Réciproquement, si $\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))dt$ est convergente, la question (c) montre qu'alors V admet une espérance.
Et la question (b) a montré aussi qu'alors $E(V) = \int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))dt$.

Partie B

4. (a) f est une densité de probabilité, donc vérifie la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. Ainsi :

$$1 = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{1+x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\left(\alpha\Big[\text{Arctan}(x)\Big]_0^A\right) = \alpha\frac{\pi}{2}$$

Donc $\alpha = \dfrac{2}{\pi}$.

(b) Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\text{Arctan}(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(c) En utilisant la formule du **A.1**, on obtient que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_2(x) = 1-(1-F(x))^2 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 1-\left(1-\dfrac{2}{\pi}\text{Arctan}(x)\right)^2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Et d'après **A.2**, Y_2 admet une densité f_2 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_2(x) = 2f(x)(1-F(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{4}{\pi(1+x^2)}\left(1-\dfrac{2}{\pi}\text{Arctan}(x)\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(d) La fonction $\theta : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ (par somme et composition de fonctions usuelles dérivables) et sa dérivée est :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad \theta'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc θ est constante, égale à sa valeur en 1 qui est $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, d'où le résultat.

(e)

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad f_2(x) &= \frac{4}{\pi(1+x^2)}\left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(x)\right) \\ &= \frac{4}{\pi(1+x^2)} \times \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{8}{\pi^2 x^3}\end{aligned}$$

(f) D'une part on a $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi x}$, or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge (Riemann), donc par critère d'équivalence de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ ne converge pas, donc X n'admet pas d'espérance.
D'autre part $xf_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{8}{\pi^2 x^2}$, or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge (Riemann), donc par critère d'équivalence de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf_2(x)dx$ converge également, la variable Y_2 admet donc une espérance.
Ainsi la loi de X est implosive et son indice d'implosion est 2.

5. (a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

Donc on a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

(b) Déterminons un équivalent de $kP(X=k)$:

$$\begin{aligned}
kP(X=k) &= k\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right) \\
&= \frac{k(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \\
&= \frac{k^{3/2}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{k}} - \sqrt{1+\dfrac{1}{k}}\right)}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \\
&= \frac{k^{3/2}\left(\left(1+\dfrac{1}{k}+\underset{k\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)-\left(1+\dfrac{1}{2k}+\underset{k\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)\right)}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \\
&= \frac{\dfrac{\sqrt{k}}{2}+\underset{k\to+\infty}{o}(\sqrt{k})}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \\
&\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{k}}
\end{aligned}$$

Donc, par critère d'équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum kP(X=k)$ est divergente. La variable X n'admet donc pas d'espérance.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F(k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{i+1}} - \frac{1}{\sqrt{i+2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+2}}$$

(d) En utilisant la formule du **A.1**, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ F_2(k) = 1 - \frac{1}{k+2}$$

(on remarque que cette formule est encore valable pour $k=-1$).
On en tire la loi de Y_2 :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_2=k) = P(Y_2 \leqslant k) - P(Y_2 \leqslant k-1) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

On observe alors que $kP(Y_2=k) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k}$, et donc, par critère d'équivalence de fonctions positives, la série $\sum kP(Y_2=k)$ diverge.
Donc Y_2 n'admet pas d'espérance.

(e) La formule du **A.1** donne ici :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_3 \leqslant k) = 1 - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}$$

Et donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_3=k) = P(Y_3 \leqslant k) - P(Y_3 \leqslant k-1) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}$$

Déterminons un équivalent de $kP(Y_3 = k)$:

$$\begin{aligned}
kP(Y_3 = k) &= k\left(\frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}\right)\\
&= \frac{k((k+2)^{3/2} - (k+1)^{3/2})}{((k+1)(k+2))^{3/2}}\\
&= \frac{k^{5/2}\left(\left(1+\frac{2}{k}\right)^{3/2} - (1+1/k)^{3/2}\right)}{((k+1)(k+2))^{3/2}}\\
&= \frac{k^{5/2}\left(1+\frac{3}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) - \left(1+\frac{3}{2k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right)}{((k+1)(k+2))^{3/2}}\\
&= \frac{\frac{3}{2}k^{3/2} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(k^{3/2}\right)}{((k+1)(k+2))^{3/2}}\\
&\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{3}{2}}{k^{3/2}}
\end{aligned}$$

Donc, par critère d'équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum kP(Y_3 = k)$ est convergente, et donc Y_3 admet une espérance.

(f) D'après ce qui précède, X est implosive et son indice d'implosion est 3.

Partie C

6. (a) La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a \geqslant 0$. Ainsi, pour que f soit une densité, il faut et il suffit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \iff \int_{1}^{+\infty} \frac{a}{x^\alpha}dx = 1 \iff \lim_{A\to+\infty}\left(\left[\frac{a}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^A\right) = 1 \iff \frac{a}{\alpha-1} = 1$$

Donc f est une densité si et seulement si $a = \alpha - 1$ (qui est bien positif).

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

(c) D'après la question **A.3**, X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}(1-F(t))dt$ est convergente.

Or $\forall t \geqslant 1,\ 1 - F(t) = \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$. Ainsi, en appliquant le critère d'équivalence pour les fonctions positives, et les intégrales de Riemann, il vient :

$$E(X) \text{ existe } \iff \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-1}}dt \text{ converge } \iff \alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2$$

(d) D'après la question **A.1**, la fonction de répartition F_n de Y_n vaut $F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$.

Donc ici, pour tout $x \geqslant 1$, $F_n(x) = 1 - \dfrac{1}{x^{n(\alpha-1)}}$. Ainsi :

$$E(Y_n) \text{ existe } \iff \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{n(\alpha-1)}}dx \text{ converge } n(\alpha-1) > 1$$

Et donc Y_n admet une espérance si et seulement si $n(\alpha - 1) > 1$.

(e) La variable aléatoire X est implosive et d'indice d'implosion m si et seulement si $m(\alpha-1)>1$ (pour que Y_m admette une espérance) et $(m-1)(\alpha-1)\leqslant 1$ (pour que m soit bien l'indice d'implosion, Y_{m-1} ne doit pas admettre d'espérance).

Pour un entier $m\geqslant 2$ donné, il suffit donc de prendre $\alpha = 1+\dfrac{1}{m-1}$ pour que X soit implosive d'indice d'implosion m.

Donc pour tout entier $m\geqslant 2$ il existe une loi implosive d'indice d'implosion égal à m.

Partie D

7. (a) La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, et positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a\geqslant 0$. Ainsi, pour que f soit une densité, il faut et il suffit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \iff \int_{2}^{+\infty}\frac{a}{t\ln^2(t)}dt = 1 \iff \lim_{A\to+\infty}\left(\left[-\frac{a}{\ln(t)}\right]_2^A\right)=1 \iff \frac{a}{\ln(2)}=1$$

Ainsi, f est une densité si et seulement si $a=\ln(2)$ (qui est bien positif).

(b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<2 \\ 1-\dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} & \text{si} \quad x\geqslant 2 \end{cases}$$

(c) D'après la question **A.3**, X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-F(t))dt$ est convergente.

Donc ici, X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln(2)}{\ln(x)}dx$ converge. Or,

$$\forall x\geqslant 2,\ \frac{1}{\ln(x)}\geqslant\frac{1}{x}$$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ diverge (Riemann), par critère de comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln(2)}{\ln(x)}dx$ est divergente. La variable X n'admet donc pas d'espérance.

(d) Pour tout $n\geqslant 2$, la fonction de répartition de Y_n vérifie :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<2 \\ 1-\dfrac{\ln^n(2)}{\ln^n(x)} & \text{si} \quad x\geqslant 2 \end{cases}$$

Donc ici, Y_n admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln^n(2)}{\ln^n(x)}dx$ converge. Or par croissances comparées,

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln^n(2)}{\ln^n(x)}}=\frac{\ln^n(x)}{\ln^n(2)x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

On a donc que : $\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{\ln^n(2)}{\ln^n(x)}\right)$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ diverge (Riemann), par critère de comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln^n(2)}{\ln^n(x)}dx$ est divergente et donc Y_n n'admet pas d'espérance, ceci pour tout entier $n\geqslant 2$.

(e) La variable aléatoire X n'admet pas d'espérance et sa loi n'est pas implosive (car pour tout $n \geqslant 2$, Y_n n'admet pas d'espérance). La réponse est donc « oui ».

Partie E

8. Notons F la fonction de répartition de X et G celle de Y. Puisque Y_n a la même loi que Y, il vient que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = 1 - (1 - F(x))^n$$

Et donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - (1 - G(x))^{1/n}$$

9. Puisque Y suit la loi géométrique de paramètre p, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$G(k) = P(Y \leqslant k) = 1 - (1-p)^k$$

Si une variable aléatoire X implosait sur Y avec un indice d'implosion $m \geqslant 2$, on aurait :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X \leqslant k) = 1 - (1 - G(k))^{1/m} = 1 - (1-p)^{k/m}$$

Donc X suivrait la loi géométrique de paramètre $(1-p)^{1/m}$, et donc elle admettrait une espérance, ce qui n'est pas possible pour une variable implosive.
Donc aucune variable implosive n'implose sur Y.

10. On a vu lors de la partie **C** que pour tout entier $m \geqslant 2$, il existe une loi implosive d'indice d'implosion m. Soit X une variable aléatoire qui suit une telle loi et soit $Y = Y_n$. Alors la loi de X est implosive d'indice d'implosion m et la loi de X implose sur la loi de Y. La réponse est donc « oui ».

11. Puisque X implose sur Y avec un indice d'implosion égal à m, on a que :

$$1 - G(x) = (1 - F(x))^m$$

(car Y a la même loi que Y_m)
Et également :

$$\int_0^{+\infty} (1 - F(x))^m dx \text{ converge}$$

(car Y_m admet une espérance)
Mais aussi :

$$\int_0^{+\infty} (1 - F(x))^{m-1} dx \text{ diverge}$$

(car Y_{m-1} n'admet pas d'espérance puisque X est d'indice d'implosion m)
Soit alors un entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant m$.
La fonction H définie sur tout $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = 1 - (1 - F(x))^{m/k},$$

est une fonction de répartition (elle est continue et croissante sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en quelques points, et elle tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$).
Soit alors Z une variable aléatoire ayant H pour fonction de répartition.
H étant continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en quelques points (car F l'est), Z admet une densité.
On peut donc utiliser les résultats de la partie **A**.
On a bien évidemment pour tout réel x,

$$(1 - H(x))^k = 1 - G(x)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(1-H(x))^{k-1} &= (1-F(x))^{\frac{k-1}{k}m}\\ &= (1-F(x))^{m-\frac{m}{k}}\\ &\geqslant (1-F(x))^{m-1} \text{ (puisque } k \leqslant m \text{ et } 0 \leqslant 1-F(x) \leqslant 1)\end{aligned}$$

Donc il vient que :

$$\int_0^{+\infty} (1-H(x))^{k-1} \text{ diverge}$$

Donc Z implose sur Y avec un indice d'implosion de k.

Partie F

12. Distinguons deux cas :
    - Si X n'admet pas d'espérance : pour tout $m \geqslant 2$ on a $0 \leqslant X_1 \leqslant Z_m$ et donc Z_m n'admet pas d'espérance non plus. Donc la loi de X est explosive, d'indice d'explosion égal à 2.
    - Si X admet une espérance : pour tout $m \geqslant 2$ on a $0 \leqslant Z_m \leqslant X_1 + X_2 + \cdots + X_m$ et donc Z_m admet une espérance. Donc la loi de X n'est pas explosive.

    Donc $m = 2$ est le seul entier tel qu'il existe des lois explosives dont l'indice d'explosion est m.
13. D'après ce qui a été dit à la question précédente, les variables aléatoires positives qui ne sont pas explosives sont celles qui admettent une espérance.

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,02 et un écart-type de 4,61, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice proposait ici l'étude d'un endomorphisme de polynômes, symétrique pour un certain produit scalaire, et on se proposait de déterminer une base orthonormée de vecteurs propres pour cet endomorphisme. Les premières questions sont classiques et de difficulté progressive. Les questions 1 et 2 sont un objectif à atteindre pour tout candidat raisonnable.
La question 3 est nécessite un peu plus d'initiativ. La question 4 est enfin plus délicate et nécessite des raisonnements plus fins, ce qui permet éventuellement de départager les meilleurs candidats.

1. (a) Question bien traitée par une large majorité des candidats
   (b) Question bien traitée par une large majorité des candidats
   (c) Beaucoup de candidats ne répondent que partiellement à la question, parfois sans justification. Trop nombreux sont ceux qui pensent que toute matrice triangulaire est nécessairement diagonalisable.
2. (a) Certains candidats ont mal compris la question, et souhaitent démontrer ici que la forme $< \, , >$ est non-dégénérée. Le critère de convergence est rarement bien rédigé.
   (b) Question bien traitée par une large majorité des candidats
3. La plupart des candidats savent ce qu'ils doivent démontrer ici. Beaucoup n'ont pas pensé à intégrer par parties et sont alors restés bloqués.
4. (a) Plusieurs candidats repèrent un procédé de Gram-Schmidt. Peu tentent une récurrence forte. Aucun n'arrive à démontrer l'hérédité.
   Plusieurs candidats ont cependant démontré le caractère libre de la famille correctement, soit en admettant l'orthogonalité, soit en démontrant rapidement que $\deg(P_k) = k$ pour tout k.

(b) Aucun candidat n'a su faire la question. Beaucoup ont dit que puisque φ est symétrique, φ est diagonalisable en base orthonormée et comme la base est orthonormée, elle est forcément constituée de vecteurs propres.

Exercice 2

Cet exercice proposait ici de mettre en place la méthode de Snellius pour approcher la valeur de π à l'aide de fonctions trigonométriques. Utilisant principalement des résultats élémentaires d'analyse, cet exercice a été plutôt malmené par les candidats qui semblent être peu à l'aise avec les manipulations de polynômes ou de formules trigonométriques simples.

1. (a) Cette question a, de manière surprenante, été mal traitée par de nombreux candidats, ou alors de façon incomplète. Certains candidats ne savent pas ce que signifie factoriser : ainsi certains candidats ont proposé $P(X) = X(2X^2 - 3X + \frac{1}{X})$ ou encore $P(X) = X(2X^2 - 3X) + 1$. Une large majorité de candidats a bien remarqué que 1 était racine évidente mais se contentait alors de factoriser par $(X - 1)$. Ceux qui ont continué ont souvent oublié le coefficient dominant du polynôme dans la factorisation finale.

   (b) Question bien traitée par une large majorité des candidats. La dérivabilité n'est pas toujours justifiée.

   (c) Certains candidats qui n'avaient pas complètement factorisé P à la question (a) le font ici. Pour ceux qui n'ont pas la factorisation, l'étude du signe est rarement bien traitée. Certains candidats ne précisent pas « strictement ».

   (d) Peu de candidats se soucient de vérifier que le dénominateur ne s'annule pas. La plupart des candidats a su trouver le bon polynôme.

   (e) Cette question a été bien traitée lorsque la précédente l'était.

   (f) La question est bien traitée par de nombreux candidats, à part les inégalités strictes qui ne sont pas toujours justifiées.

2. (a) Cette question, lorsqu'elle est abordée par les candidats, est en général bien traitée. Une part non négligeable de candidats ne connait pas les formules trigonométriques ou les valeurs remarquables de cos et sin, ce qui les empêche de répondre à cette question. Remarquons cependant que peu de candidats ayant obtenu les bons résultats ont su simplifier correctement les expressions obtenues.

   (b) La plupart des candidats a penser à remplacer x par $\pi/12$, mais beaucoup de candidats se sont arrêtés là car ils n'ont pas su faire la question précédente.

3. (a) La première égalité est largement correctement démontrée, même parfois par des candidats n'ayant pas fait la question 2(a). Dans la deuxième partie de la question, peu de candidats ont étudié les signes des expressions demandées. Rappelons que lorsque $\alpha^2 = \beta$, il est déjà nécessaire que $\beta \geqslant 0$ pour pouvoir écrire $\sqrt{\beta}$, et de plus, on n'a alors $\alpha = \sqrt{\beta}$ uniquement si on est certain que $\alpha \geqslant 0$.

   (b) Peu traitée par les candidats.

   (c) Peu traitée par les candidats.

   (d) La plupart des candidats ont fait l'effort de proposer un script. Le but ici étant de déterminer une valeur approchée de π, le but était bien entendu de ne pas utiliser `%pi` dans le programme.

   (e) Les candidats semblent encore peu à l'aise pour écrire seuls un programme entièrement, même assez simple, et même avec le modèle dans la question précédente. Mais les candidats qui abordent en général la question la traitent en général plutôt bien.

   (f) Quelques rares candidats ont commenté correctement le graphique.

CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

Problème

Le problème proposait ici l'étude de variables aléatoires dont la loi est implosive (ou explosive), nouvelle notion définie dans l'énoncé. Le but était donc ici de tester la réactivité des candidats face à l'appropriation d'une définition nouvelle, et la bonne mobilisation des connaissances pour retrouver des schémas déjà vus dans le cours de probabilités du programme.

La plupart des candidats a abordé avec succès les parties A et B, et dans une moindre mesure les parties C et D.

Partie A

1. Question très classique, qui a été largement abordée par les candidats avec succès. Les candidats doivent prendre garde à ne pas confondre intersection d'événemens et produit de probabilités, créant ainsi parfois des intersections de probabilités qui n'ont aucun sens …
2. La justification de l'existence d'une densité pour Y_n est souvent omise par les candidats, ces derniers se contentant de dériver l'expression précédente sans autre précaution. Les points de non-dérivabilité de la fonction de réparation ne sont pratiquement pas considérés.
3. Cette question, fort classique, a sûrement été étudiée par de nombreux candidats pendant leur préparation. Ici redonnée avec peu d'indications, elle s'avéra assez difficile et fut donc mal traitée.
   (a) Le fait que Φ était de classe $\mathcal{C}^1$ est très rarement justifié. L'intégration par parties fut généralement correcte, soit en considérant directement la bonne primitive $(1-\Phi)$, soit en prenant Φ puis en écrivant que $x = \int_0^x 1dt$.
   (b) Cette question a été très rarement bien traitée. La plupart des candidats a dit que $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\Phi(x)) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\Phi(x)) = x \times 0 = 0$.
   (c) La plupart des étudiant n'a pas compris qu'il fallait ici redémontrer que $x(1-\Phi(x))$ tend vers 0. Ils ont, dans leur majorité, considéré que cette limite était encore acquise comme dans la question précédente.
   (d) Question bien traitée par une large majorité de candidats.

Partie B

4. (a) Question assez bien traitée par une large majorité de candidats. Certains candidats connaissent mal les propriétés remarquables de la fonction Arctan (valeur en 0, dérivée, limite en $+\infty$)
   (b) Certains candidats ont considéré que le support de X était $\mathbb{R}$, ce qui ne les a pas conduit à distinguer les cas $x < 0$ ou $x \geqslant 0$.
   (c) Question bien traitée par une large majorité de candidats.
   (d) Question bien traitée par une large majorité de candidats. Les candidats pensent bien à étudier une fonction, mais ne précisent pas souvent que la fonction est dérivable.
   (e) Peu de candidats donnent un équivalent correct, même en ayant obtenu la bonne densité au préalable.
   (f) La justification du fait que f n'admet pas de densité mais f_2 oui, est rarement bien traitée. La plupart des candidats parvient cependant à conclure du caractère implosif de X grâce à la formulation des questions.
5. (a) Question bien traitée par une large majorité de candidats.
   (b) Peu de candidats ont cherché un équivalent de $kP(X=k)$. La plupart a décomposé $kP(X=k)$ entre le terme général d'une série « télescopique »et d'une série divergente : $kP(X=k) = \dfrac{k}{\sqrt{k+1}} -$

$\dfrac{k+1}{\sqrt{k+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$. Quelques uns additionnent donc sans précaution des séries divergentes pour en déduire que la série somme diverge ou converge en fonction de ce qui les arrange.

(c) Question bien traitée par une large majorité de candidats.

(d) Le calcul de F_2 est souvent correctement mené, mais les candidats ne voient pas comment en déduire la loi de Y_2 et plus rarement encore pour en déduire des informations sur l'espérance. Certains candidats étudient la série de terme général $kF_2(k)$ au lieu de $kP(Y_2 = k)$.

(e) Les raisonnements ont été en général les mêmes que ceux qui étaient apparus dans la question précédente.

(f) Certains candidats ont compris la logique des questions précédentes, et même s'ils n'ont pas su les résoudre, ont admis l'existence de l'espérance de Y_3 et la non-existence de celles de Y et Y_2 pour pouvoir conclure.

Partie C

6. (a) Nombreux sont les candidats ne s'étant pas souciés ici de la positivité et de la continuité de leur fonction densité. Certains candidats ne connaissent pas la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$.

   (b) Cette question a bien été traitée lorsque la précédente l'avait été (même calcul de primitive)

   (c) La rédaction est parfois un peu expéditive. On se contente d'étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ sans faire le lien avec l'espérance. Raisonnements peu soignées et peu rigoureux.

   (d) On peut noter de nombreuses erreurs sur le calcul de f_n.

   (e) Rares sont les candidats ayant réussi à rédiger correctement cette question.

Partie D - Lois non implosives

7. (a) Peu de candidats trouvent une primitive correcte de f.

   (b) Cette question dépend de ce qui a été fait dans la question précédente.

   (c) L'étude de la convergence de l'intégrale a été très rarement correctement justifiée.

   (d) Question rarement abordée.

   (e) Question rarement abordée.

Parties E et F

Très peu de candidats ont abordé ces dernières parties, destinées à terminer le sujet sur des questions plus ouvertes pour éventuellement départager les excellentes copies. Quelques candidats ont traité la question 8 et la question 9 mais se sont vite arrêté. On peut noter tout de même la présence d'une dizaine d'excellentes copies qui ont traité l'ensemble du sujet, parties E et F comprises, et 3 candidats ont relevé d'eux-mêmes l'erreur d'énoncé de la question 11.