



ANNALES
OFFICIELLES
2014

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

ÉPREUVE ÉCRITE
ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
OPTION TECHNOLOGIQUE

■ **Mathématiques**



ECRICOME
VISER PLUS HAUT

www.ecricome.org

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

■ Sujets

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

■ Évaluation

Exercices de valeur sensiblement égales.

■ Épreuve

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

EXERCICE 1

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ puis dresser le tableau des variations de g sur $]0, +\infty[$.
- Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.
On la note α .
- Justifier que :

$$\alpha \in [1, e] \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \alpha.$$

- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et préciser la monotonie de la fonction f .
- Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq e.$$

- Vérifier que :

$$\forall x \in [1, e], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

En déduire, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

- Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}.$$

- Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

EXERCICE 2

Cet exercice est composé de deux parties.

La partie **I** consiste à calculer en fonction de n les termes d'une suite récurrente $(u_n)_{n \geq 1}$.

La partie **II** étudie l'obtention du premier double PILE lors de lancers d'une pièce déséquilibrée.

Les résultats de la partie **I** peuvent être utilisés librement dans la partie **II**.

PARTIE I : Etude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{4}{9}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.$$

On considère également les quatre matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = QAP$$

ainsi que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, les matrices colonnes :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_n = QX_n.$$

- Vérifier que les deux matrices PQ et D sont diagonales (*Les calculs devront être inscrits sur la copie*).
- En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1} .
- Soit $n \geq 1$. Donner, en la justifiant, la relation liant X_{n+1} , A et X_n . Prouver que $PY_n = X_n$. En déduire que :

$$Y_{n+1} = DY_n.$$

- Prouver que :

$$\forall n \geq 1, \quad Y_n = D^{n-1}Y_1.$$

5. Calculer Y_1 et expliciter les coefficients de la matrice colonne Y_n .
6. En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{4}{9} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right].$$

PARTIE II : Probabilités discrètes.

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir PILE vaut $\frac{2}{3}$.

On suppose donné un espace probabilisé muni d'une probabilité P modélisant cette expérience.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang n si on obtient PILE au $(n-1)$ -ième lancer et PILE au n -ième lancer.

On note :

- pour tout entier $n \geq 1$, F_n l'événement « on obtient FACE au n -ième lancer » ;
- pour tout entier $n \geq 2$, D_n l'événement « on obtient un double PILE au rang n **pour la première fois** » ;
- pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = P(D_n)$. On conviendra que $v_1 = 0$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement :

« PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE »

alors l'événement D_8 est réalisé.

1. On lance n fois de suite la pièce de monnaie. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces n lancers.
 - (a) Déterminer la loi de X (*une réponse argumentée est attendue*). Préciser l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable X ainsi que la valeur de $P(X = k)$ lorsque $k \in X(\Omega)$.
 - (b) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .
2. On lance indéfiniment la pièce. On note Y le rang d'apparition du premier PILE, s'il apparaît.

- (a) Déterminer la loi de Y (*une réponse argumentée est attendue*). Préciser l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par la variable Y ainsi que la valeur de $P(Y = k)$ lorsque $k \in Y(\Omega)$.
- (b) Donner la valeur de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y .

3. Calculer v_2 et v_3 . Vérifier que :

$$v_3 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1.$$

Rappelons que l'on a convenu que $v_1 = 0$.

4. Soit $n \geq 2$. On suppose qu'au premier lancer, PILE est obtenu et on souhaite la réalisation de l'événement D_{n+2} .

Quel est alors le résultat du second lancer ? A l'issue de ces deux premiers lancers, combien de lancers reste-t-il à effectuer pour que D_{n+2} puisse se réaliser ? *Les réponses devront être justifiées.*

En déduire que :

$$P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \frac{1}{3}v_n.$$

5. Pour $n \geq 2$, justifier que :

$$P_{F_1}(D_{n+2}) = v_{n+1}.$$

6. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n.$$

En outre, d'après la question **II.3**, cette formule est vraie pour $n = 1$.

7. A l'aide de la partie **I**, justifier que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(D_n) = \frac{4}{9} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right].$$

8. Pour tout entier $n \geq 2$, on note E_n l'événement « il n'y a pas eu deux PILE consécutifs au cours des n premiers lancers ».

Exprimer l'événement $\overline{E_n}$ en fonction des événements D_2, \dots, D_n . En déduire que :

$$P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^n v_k.$$

9. Calculer la limite de $P(E_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

EXERCICE 3

On considère les fonctions f , g et h définies respectivement sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{1+e^x}, \quad g(x) = -2 \ln(1+e^{-x})$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Soit $x \geq 0$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ puis vérifier que :

$$h(x) = -f'(x) \quad \text{et} \quad f(x) = g'(x).$$

2. Soit $A \geq 0$. Justifier que :

$$\int_0^A h(x) dx = 1 - f(A).$$

Que vaut $\int_0^A f(x) dx$?

3. Soit $A \geq 0$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^A x.h(x) dx = -Af(A) + g(A) - g(0).$$

4. La fonction h est-elle continue en 0 ? *Une réponse argumentée est attendue.*

5. Prouver que h est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par Z une variable aléatoire dont h est une densité.

6. Démontrer que la fonction de répartition H de Z est définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} \text{si } x \geq 0, & H(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ \text{si } x < 0, & H(x) = 0. \end{cases}$$

7. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(Z \geq \ln(2)), \quad P(\ln(2) \leq Z \leq \ln(8)) \quad \text{et} \quad P_{(Z \geq \ln(2))}(Z \leq \ln(8)).$$

On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

8. Déterminer la médiane de Z c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle

$$H(x) = \frac{1}{2}.$$

9. Etablir que Z possède une espérance et donner la valeur de $E(Z)$.