CORRIGÉ

EXERCICE 1 :

1) Limites

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to0^+}(-x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to0^+} g(x)=+\infty$$

$$\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ g(x)=x\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x}-1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{\ln x}{2x}-1\right)=-1\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$$

2) Dérivée

La fonction g est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ comme somme de fonctions dérivables sur $\left]0,+\infty\right[$

$\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ g'(x)=-\frac{1}{2x}-1<0$, comme somme de termes strictement négatifs

3)

$$\left.\begin{array}{l}g \text{ continue puisque dérivable sur } \left]0,+\infty\right[\\ g \text{ strictement décroissante sur } \left]0,+\infty\right[\\ g\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\left]-\infty,+\infty\right[\text{ qui contient } 0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{l'équation } g(x)=0 \text{ a une seule solution dans } \left]0,+\infty\right[$$

Cette solution est notée α

4)

$$\left.\begin{array}{l}g(1)=1>0\\ g(e)=\frac{3}{2}-e<0\end{array}\right\}\Rightarrow 1<\alpha<e$$

De plus $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$

5)

La fonction f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ (somme de fonctions dérivables sur $\left]0,+\infty\right[$)

$\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\ f'(x)=\frac{-1}{2x}<0$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\left]0,+\infty\right[$

6) $P(n):"1\le u_n\le e"$

Initialisation : $u_0=1\in[1,2]$ donc $P(0)$ vraie

Hérédité : pour un $n\ge 0$, $P(n)$ vraie

On a alors $1\le u_n\le e \Rightarrow f(e)=\dfrac{3}{2}\le f(u_n)\le f(1)=2$ car f est décroissante sur $]0,+\infty[$

On obtient $1\le u_{n+1}\le e$ donc $P(n+1)$ vraie

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}, 1\le u_n\le e$

7)

$\forall x\in]0,+\infty[, f'(x)=\dfrac{-1}{2x}<0$

Alors $\forall x\in]0,+\infty[, |f'(x)|=\dfrac{1}{2x}$

Si $1\le x\le e$ alors $\dfrac{1}{e}\le\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{1}$ (puisque la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$)

On a donc $\forall x\in]0,+\infty[, |f'(x)|=\dfrac{1}{2x}\le\dfrac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } [1,e]\\ \forall x\in[1,e], |f'(x)|\le\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ de } [1,e], |f(b)-f(a)|\le\frac{1}{2}|b-a|$$

Prenons $a=\alpha\in[1,e]$ et $b=u_n\in[1,e]$ pour tout entier naturel n

Il vient que $\forall n\in\mathbb{N}, |f(u_n)-f(\alpha)|=|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

8) $Q(n):"|u_n-\alpha|\le\dfrac{1}{2^n}(e-1)"$

Initialisation : $|u_0-\alpha|=|1-\alpha|=\alpha-1$ et $\dfrac{1}{2^0}(e-1)=e-1$

Comme $\alpha\le e$, on a $\alpha-1\le e-1$ donc $Q(0)$ vraie

Hérédité : on suppose que pour un $n\ge 0$, $|u_n-\alpha|\le\dfrac{1}{2^n}(e-1)$

Alors $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|\le\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2^n}(e-1)$ soit $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2^{n+1}}(e-1)$ donc $Q(n+1)$ vraie

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n-\alpha|\le\dfrac{1}{2^n}(e-1)$

9) $\dfrac{1}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puisque $-1<\dfrac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$; la suite (u_n) converge vers α

EXERCICE2 :

I. Calcul de u_n

1) $PQ=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$ est bien une matrice diagonale

La matrice $D=QAP=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&2\\\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-3\\2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}6&0\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0\\0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ est une matrice diagonale

2) $PQ=I_2$ donc P est inversible et $P^{-1}=Q$

3) $\forall n\in\mathbb{N}^*, X_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{9}u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\\frac{2}{9}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}=AX_n$

En multipliant à gauche chaque membre de l'égalité $Y_n=QX_n$ par la matrice P on tire l'égalité $PY_n=PQX_n$ soit $PY_n=X_n$

On a alors $\boxed{Y_{n+1}=QX_{n+1}=QAX_n=QAPY_n=DY_n}$

4) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*, Y_n=D^{n-1}Y_1$

Initialisation : $D^{1-1}Y_1=D^0Y_1=I_2Y_1=Y_1$ donc la proposition est vraie pour $n=1$

Hérédité : pour un $n\geq 1$, on suppose que $Y_n=D^{n-1}Y_1$

Alors $Y_{n+1}=DY_n=DD^{n-1}Y_1=D^nY_1$, la propriété est bien héréditaire

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, Y_n=D^{n-1}Y_1}$

5) $X_1=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$, $\boxed{Y_1=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&3\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\frac{4}{9}\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{27}\\\frac{4}{27}\end{pmatrix}}$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, Y_n=D^{n-1}Y_1=\begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}&0\\0&\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{27}\\\frac{4}{27}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{27}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\\frac{4}{27}\times\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\end{pmatrix}}$$

6) On a vu que $X_n=PY_n$ donc $X_n=\begin{pmatrix}3&-3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{27}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\\frac{4}{27}\times\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{4}{9}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\\\frac{8}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{4}{27}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{On a donc } u_n=\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{4}{9}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}=\frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right]}$$

II Probabilités

1)

a) On effectue n épreuves identiques et indépendantes.

A chaque épreuve deux issues : $\begin{cases} \text{succès: on obtient pile avec la probabilité } \dfrac{2}{3} \\ \text{échec} \end{cases}$

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } X \text{ compte les succès donc } X \to B\left(n, \frac{2}{3}\right)}$$

$\forall k \in X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$

b) $E(X) = n\frac{2}{3}; V(X) = n\frac{2}{9}$

2)

a) On effectue des épreuves identiques et indépendantes

A chaque épreuve deux issues : $\begin{cases} \text{succès: on obtient pile avec la probabilité } \dfrac{2}{3} \\ \text{échec} \end{cases}$

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } Y \text{ est le temps d'attente du premier succès donc } Y \to G\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$\forall k \in Y(\Omega) = \mathbb{N}^*, P(Y = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

b) $E(Y) = \frac{3}{2}; V(X) = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

3)

$v_2 = p(D_2) = p\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right) = p\left(\overline{F_1}\right)p\left(\overline{F_2}\right)$ car les deux évènements sont indépendants

Donc $\boxed{v_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}}$

$v_3 = p\left(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}\right) = p(F_1)\,p\left(\overline{F_2}\right)p\left(\overline{F_3}\right)$ car les trois évènements sont indépendants

Donc $\boxed{v_3 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}}$

Alors $\frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1 = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + 0 = \frac{4}{27} = v_3$

4) Si au premier lancer on obtient pile, pour que l'évènement D_{n+2} se réalise (c'est à dire pour obtenir un double pile pour la première fois au rang $n+2 \geq 3$) il faut obtenir face au deuxième lancer, il restera n lancers pour obtenir un double pile pour la première fois.

$\forall n \geq 2, p_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = p_{\overline{F_1}}(F_2 \cap D_{n+2}) = p_{\overline{F_1}}(F_2) p_{\overline{F_1} \cap F_2}(D_{n+2})$

$p_{\overline{F_1}}(F_2) = p(F_2) = \dfrac{1}{3}$ et $p_{\overline{F_1} \cap F_2}(D_{n+2}) = p(D_n) = v_n$ et $\boxed{\forall n \geq 2, p_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \dfrac{1}{3} v_n}$

5) Si au premier lancer on obtient face, pour que l'évènement D_{n+2} se réalise (c'est à dire pour obtenir un double pile pour la première fois au rang $n+2 \geq 3$) il restera $(1+n)$ lancers pour obtenir un double pile pour la première fois

Donc $\boxed{\forall n \geq 2, p_{F_1}(D_{n+2}) = p(D_{n+1}) = v_{n+1}}$

6) F_1 et $\overline{F_1}$ forment un système complet d'événements, la formule des probabilités donne :

$\forall n \geq 2, v_{n+2} = p(D_{n+2}) = p(F_1 \cap D_{n+2}) + p(\overline{F_1} \cap D_{n+2}) = p(F_1) p_{F_1}(D_{n+2}) + p(\overline{F_1}) p_{\overline{F_1}}(D_{n+2})$

Ce qui donne : $\boxed{\forall n \geq 2, v_{n+2} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} v_{n+1} + \dfrac{1}{3} v_n = \dfrac{2}{9} v_{n+1} + \dfrac{1}{3} v_n}$

7)

La suite v vérifie $v_1 = 0, v_2 = \dfrac{4}{9}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+2} = \dfrac{2}{9} v_{n+1} + \dfrac{1}{3} v_n$

La partie I permet d'écrire : $v_n = P(D_n) = \dfrac{4}{9}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n-1}\right]$.

8) pour $n \geq 2$, $\boxed{\overline{E_n} = D_2 \cup \ldots \cup D_n}$ union d'événements deux à deux incompatibles

On en déduit que pour $n \geq 2$, $p(\overline{E_n}) = \sum_{k=2}^{n} p(D_k)$ donc $\boxed{p(E_n) = 1 - p(\overline{E_n}) = 1 - \sum_{k=2}^{n} v_k}$

9) $p(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} \dfrac{4}{9}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{k-1}\right] = 1 - \dfrac{4}{9} \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{k-1}\right]$.

En posant $i = k-1$, $p(E_n) = 1 - \dfrac{4}{9} \sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{i} - \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{i}\right] = 1 - \dfrac{4}{9}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{i} - \sum_{i=0}^{n-1}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{i}\right)$

Finalement $p(E_n) = 1 - \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}} - \dfrac{1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n}{1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)}\right)$

Comme $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ et $-1 < \dfrac{-1}{3} < 1$, $\lim_{n \to +\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n = 0$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p(E_n) = 1 - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)}\right) = 1 - \frac{4}{9}\left(3 - \frac{3}{4}\right) = 1 - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = 1 - 1 = 0}$$

EXERCICE 3 :

1) $\forall x \in [0,+\infty[, 1+e^x > 0$ (somme de termes strictement positifs), donc la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ (inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas sur $[0,+\infty[$)

On a $\forall x \in [0,+\infty[, f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} = h(x) \Rightarrow \forall x \in [0,+\infty[, h(x) = -f'(x)$

$\forall x \in [0,+\infty[, 1+e^{-x} > 0$, donc la fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme composée légitime de fonctions dérivables

On a $\forall x \in [0,+\infty[, g'(x) = \dfrac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})} = \dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \dfrac{2}{1+e^x} \Rightarrow \forall x \in [0,+\infty[, g'(x) = f(x)$

2) $\forall A \in [0,+\infty[, \int_0^A h(x)dx = [-f(x)]_0^A = -f(A)+f(0) = 1-f(A)$

$\forall A \in [0,+\infty[, \int_0^A f(x)dx = [g(x)]_0^A = g(A)-g(0)$

3) $\forall A \in [0,+\infty[$, posons $u(x) = x$ et $v'(x) = h(x) = -f'(x)$

On a $u'(x) = 1$ et $v(x) = -f(x)$ avec les fonctions u et v de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ puisque u est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ (fonction affine) et v est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ (f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ comme inverse d'une fonction de classe C^1 ne s'annulant pas sur $[0,+\infty[$)

L'intégration par parties est possible et donne :

$$\int_0^A h(x)dx = [-xf(x)]_0^A - \int_0^A -f(x)dx = -Af(A) + \int_0^A f(x)dx = -Af(A) + g(A) - g(0)$$

4) $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 0 \\ h(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow h$ non continue en 0

5)

a) La fonction h est continue sur $]-\infty,0[$ car nulle et la fonction h est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$: **la fonction h est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 (question 4)**

b) $\forall x \in]-\infty,0[, h(x) = 0 \geq 0$ et $\forall x \in [0,+\infty[, h(x) > 0$ donc **la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$**

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = \int_0^{+\infty} h(x)\,dx$ sous réserve de convergence

$\forall x \in [0,+\infty[, f(x) = \dfrac{1}{1+e^x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Donc $\int_0^A h(x)\,dx = 1 - f(A) \underset{A\to+\infty}{\to} 1$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$ converge et vaut 1

Conclusion : la fonction h est une densité de probabilité

6) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \text{si } x \geq 0 & \int_0^x h(t)\,dt = 1 - f(x) = 1 - \dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{e^x - 1}{e^x+1} \end{cases}}$

7) $\boxed{P(Z \geq \ln 2) = 1 - P(Z < \ln 2) = 1 - H(\ln 2) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}}$

$\boxed{P(\ln 2 \leq Z \leq \ln 8) = H(\ln 8) - H(\ln 2) = \dfrac{7}{9} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}}$

$\boxed{P_{(Z\geq \ln 2)}(Z \leq \ln 8) = \dfrac{P(\ln 2 \leq Z \leq \ln 8)}{P(Z \geq \ln 2)} = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{2}{3}}$

8) $\forall x \in]-\infty, 0[, H(x) = 0 \neq \dfrac{1}{2}$

$\forall x \in [0,+\infty[, H(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x - 2 = e^x + 1$, puisque $\forall x \in [0,+\infty[, 1+e^x > 0$

Nous avons donc $H(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$

$\boxed{\text{La médiane de la variable aléatoire } Z \text{ est donc } \ln 3}$

9) Sous réserve de convergence $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,h(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\,h(x)\,dx$

Or $\forall A \in [0,+\infty[, \int_0^A xh(x)\,dx = -A\,f(A) + g(A) - g(0)$

$\forall A \in [0,+\infty[,\ A\,f(A) = \dfrac{2A}{1+e^A} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{A} + \dfrac{e^A}{A}} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$

En effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (limite usuelle)

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, nous avons $\lim\limits_{A\to+\infty} g(A) = -2\ln 1 = 0$

Conclusion $\int_0^A xh(x)\,dx \underset{A\to+\infty}{\to} -g(0) = 2\ln 2$

$\boxed{\text{La variable aléatoire } Z \text{ admet donc une espérance } E(Z) \text{ et } E(Z) = 2\ln 2}$

RAPPORT

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Avec une moyenne de 10,1 et un écart-type de 6, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1

1. Bien traitée par une large majorité des candidats.
2. Bien traitée par une large majorité des candidats.
3. Si une grande minorité répond correctement, pour un petit quart des candidats, certaines hypothèses du théorème de bijection ne sont pas mentionnées (oubli ? rédaction confuse ?).
4. Seule une moitié des candidats est en mesure de justifier l'une des deux affirmations et moins d'un quart est capable de justifier les deux.
5. Bien traitée par une large majorité des candidats.

6. Près de la moitié des candidats est en mesure de mener à bien la récurrence avec quelques imperfections et la moitié d'entre eux (soit un quart) de la rédiger sans aucune erreur.

7. 50 % des candidats avancent des arguments significatifs à cette question qui fut très discriminante. Parmi les trois difficultés présentes (gestion des valeurs absolues, énoncé de l'inégalité des accroissements finis et mise en oeuvre de celle-ci), 16 % des candidats surmontèrent une seule (respectivement deux, respectivement trois) de ces difficultés !

8. Seules les meilleures copies (10 %) répondirent convenablement à cette question mais s'y ajoute près d'un quart des candidats donnant des éléments significatifs pour aboutir à la preuve (difficultés essentiellement liées à nouveau à la valeur absolue).

9. Même remarque qu'à la question précédente.

EXERCICE 2

PARTIE I : Etude d'une suite.

1. Bien traitée par une large majorité des candidats.

2. Bien traitée par une large majorité des candidats.

3. Si le lien entre X_{n+1}, A et X_n est bien connu, la justification d'une des deux autres formules fut plus difficile par les candidats. Un nombre significatif n'utilisant pas les questions précédentes et redémontrant « à la main » les formules. Au final, 40 % des candidats répondent convenablement à toute la question et 25 % justifient seulement l'une des deux formules $PY_n = X_n$ et $Y_{n+1} = DY_n$.

4. Près de 40% des candidats traitent correctement cette question.

5. Le calcul de Y_1 est généralement correct (60 % des candidats) mais l'explicitation des coefficients de Y_n fut moins bien réussie (moitié moins).

6. Assez peu de candidats ont abordé la question (40 %) mais les trois quarts d'entre eux (30 % du total des candidats) la réussissaient très bien, les autres n'apportant aucun élément significatif pour la preuve.

PARTIE II : Probabilités discrètes.

1. Question très bien réussie par une large majorité de candidats (même si une partie significative n'apportait pas de justification rigoureuse de la loi).

2. Même remarque qu'à la question précédente.

3. Si la moitié des candidats donne une réponse correcte, seule la moitié d'entre eux (un quart des candidats) apporte une justification théorique (à l'aide d'événements, d'indépendance et d'incompatibilité).

4. Seuls les meilleurs candidats furent en mesure de répondre complètement à cette question mais un quart des candidats donna le résultat du second lancer sans parvenir à répondre à d'autres questions.

5. Cette question ne fut réussie que par les meilleures copies.

6. 25 % des candidats pu donner une justification convenable (essentiellement en français), voire pour une grosse moitié d'entre eux (15 % des candidats), donner une preuve (par formule des probabilités totales avec le système complet d'événements adéquat).

7. Moins d'un candidat sur cinq trouva un élément pertinent de justification à cette question.

8. Même commentaire qu'à la question précédente.

9. Seuls les meilleurs candidats (10 %) donnèrent une réponse adéquate et convenablement argumentée.

EXERCICE 3

1. Si la moitié des candidats parvient justifier correctement l'une des deux dérivées (le résultat étant donné par le sujet, les correcteurs évaluent simplement la justification), près de 30 % des candidats répondent complètement à la question. Il est à remarquer que 30 % des candidats ne fournissent aucun élément de réponse probant à l'une des deux formules (dérivée d"un quotient, de $\ln(u)$, etc.).

2. Près d'un tiers des candidats donne une justification convenable aux deux intégrales, près de 16 % des candidats justifient seulement la première.

3. Question réussie par un tiers des candidats (parfois avec une erreur de signe), les autres ne parvenant pas à poser l'intégration par parties (ou à la mettre en oeuvre dans l'exemple traité).

4. Un quart des candidats est en mesure de répondre à la question, un autre quart calculant convenablement les limites gauche et droite mais ne donnant pas de bonne réponse.

5. Si près de la moitié des candidats fourni au moins un élément probant pour répondre à la question, à peine 15 % d'entre eux parviennent à donner tous les élément de la preuve.

6. Une grande minorité des candidats argumente correctement à la question.

7. Même commentaire qu'à la question précédente.
8. Seul un quart des candidats donne la réponse, les autres ne fournissant aucun élément significatif permettant d'avancer dans la résolution de l'équation.
9. Près de 20 % des candidats donnent une réponse convenable mais beaucoup oublie de justifier les passages à la limite ou la convergence des intégrales considérées.