CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. - $E \subset \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est le $\mathbb{R}$-espace Vectoriel des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ à valeurs réelles.
   - $E \neq \emptyset$, puisque la fonction nulle appartient clairement à E.
   - Soient $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $\forall x > 0,\ f(x) = xP_1(x) + x\ln(x)Q_1(x)$ et $\forall x > 0,\ g(x) = xP_2(x) + x\ln(x)Q_2(x)$ avec $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'où :
   $$\begin{aligned}\forall x > 0,\ (\lambda f + g)(x) &= \lambda f(x) + g(x) = \lambda(xP_1(x) + x\ln(x)Q_1(x)) + xP_2(x) + x\ln(x)Q_2(x)\\ &= x(\lambda P_1 + P_2)(x) + x\ln(x)(\lambda Q_1 + Q_2)(x),\end{aligned}$$
   d'où $\lambda f + g$ est encore un élément de E : E est stable par combinaison linéaire.

   L'ensemble E est donc un sous-espace Vectoriel de $\mathcal{E}$, donc un $\mathbb{R}$-espace Vectoriel.
   - Puisque pour $k \in [\![1,n]\!]$, $u_k \in E$ et $v_k \in E$, on a donc $\mathrm{Vect}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) \subset E$, puisque E est stable par combinaison linéaire.
   - Soit $f \in E$. Il existe alors deux polynômes P, Q de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que : $\forall x > 0,\ f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x)$.
   Puisque $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $(x \mapsto xP(x)) \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.
   De même, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $(x \mapsto x\ln(x)Q(x)) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.
   Ainsi, par somme, $f \in \mathrm{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n)$. On a donc $E \subset \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$.

   Finalement par double inclusion, $\boxed{E = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)}$.

2. - Pour $k \in [\![1,n]\!]$, la fonction u_k est polynomiale, donc continue sur $]0,+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to 0^+} u_k(x) = 0$
   Pour $k \in [\![1,n]\!]$, la fonction v_k est continue sur $]0,+\infty[$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} v_k(x) = 0$.
   Ainsi, pour $k \in [\![1,n]\!]$, u_k et v_k sont prolongeables par continuité en 0 en posant $u_k(0) = v_k(0) = 0$.
   Ainsi, les éléments de $\mathcal{B}$ sont des fonctions prolongeables par continuité sur $[0,+\infty[$, d'où par combinaison linéaire, tout élément de E est prolongeable par continuité sur $[0,+\infty[$.
   - $$\forall x > 0,\ \varphi(u_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^k dt = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{k+1}t^{k+1}\right]_0^x = \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{k+1}u_k(x).$$
   On a donc :
   $$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k.}$$
   - $$\forall x > 0,\ \varphi(v_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^k \ln(t)dt.$$
   L'intégrale apparaissant étant bien convergente puisque la fonction $t \mapsto t^k\ln(t)$ est prolongeable par continuité sur $[0,x]$ pour tout réel $x > 0$.
   Fixons $x > 0$ et $\varepsilon \in]0,x]$. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{k+1}t^{k+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\varepsilon, x]$, on peut intégrer par parties :
   $$\int_\varepsilon^x t^k\ln(t)dt = \left[\frac{1}{k+1}t^{k+1}\ln(t)\right]_\varepsilon^x - \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^x t^k dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} \quad \text{(croiss.comp.)}$$
   D'où :
   $$\forall x > 0,\ \varphi(v_k)(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{k+1}x^k\ln(x) - \frac{1}{(k+1)^2}x^k.$$
   On a donc :
   $$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \varphi(v_k) = \frac{1}{k+1}v_k - \frac{1}{(k+1)^2}u_k.}$$

3. • Soient f et g deux fonctions de E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $\lambda f + g$, f et g sont prolongeables par continuité sur $[0, +\infty[$ donc les intégrales qui suivent sont bien convergentes et on a :
$$\forall x > 0,\ \varphi(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f + g)(t)dt = \frac{1}{x}\left(\lambda \int_0^x f(t) + \int_0^x g(t)dt\right) = \lambda\varphi(f)(x) + \varphi(g)(x).$$
L'application φ est donc bien linéaire.
   • D'après la question 2, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(u_k) \in \text{Vect}(u_k) \subset E$ et $\varphi(v_k) \in \text{Vect}(u_k, v_k) \subset E$, donc pour tout élément f de la base $\mathcal{B}$, $\varphi(f) \in E$. Par linéarité de φ, on en déduit que $\forall f \in E = Vect(\mathcal{B})$, $\varphi(f) \in E$.
4. D'après la question 2, la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & & & & & & & (0) \\ & \frac{1}{2} & & & & & & & \\ & & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & & & & & \\ & & & \frac{1}{3} & & & & & \\ & & & & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & & & \\ & & & & & \frac{1}{4} & & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \frac{1}{n+1} & -\frac{1}{(n+1)^2} \\ (0) & & & & & & & & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$
5. La matrice M représentant φ dans la base $\mathcal{B}$ étant triangulaire supérieure sans zéro sur sa diagonale, elle est inversible. Ainsi, φ est bien un endomorphisme bijectif. De plus, M étant triangulaire, on lit les valeurs propres de M (et donc de φ) sur sa diagonale : $\boxed{Sp(\varphi) = \left\{\frac{1}{k},\ k \in [\![2, n+1]\!]\right\}}$.
6. Soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$. Par définition, $f \neq 0$ et $\varphi(f) = \lambda f$. La fonction f étant prolongeable en une fonction continue sur $[0, +\infty[$, elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. On a alors : $\forall x > 0,\ g(x) = x^{-1/\lambda}(F(x) - F(0))$.
Par produit de fonctions dérivables, g est alors dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :
$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ g'(x) &= \left(-\frac{1}{\lambda}\right) x^{-1/\lambda - 1}(F(x) - F(0)) + x^{-1/\lambda} f(x) \\ &= -\frac{1}{\lambda} x^{-1/\lambda}\varphi(f)(x) + x^{-1/\lambda} f(x) = -x^{-1/\lambda} f(x) + x^{-1/\lambda} f(x) = 0.\end{aligned}$$
Ainsi, la fonction g' est nulle sur $]0, +\infty[$, donc g est constante sur $]0, +\infty[$.
Il existe donc une constante réelle α telle que : $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \alpha x^{1/\lambda}$.
Les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et $x \mapsto x^{1/\lambda}$ étant dérivables sur $]0, +\infty[$, λ étant non nul, en dérivant chaque membre de l'égalité précédente, on obtient :
$$\boxed{\forall x > 0,\ f(x) = \alpha\frac{1}{\lambda}x^{1/\lambda - 1}.}$$
7. D'après la question précédente, si f est vecteur propre pour la valeur propre λ, alors f est un élément de $\text{Vect}(x \mapsto x^{1/\lambda - 1})$. Ainsi, chaque sous-espace propre est inclus dans un espace vectoriel de dimension 1, est également de dimension au moins 1 par définition, donc est exactement de dimension 1. Puisque $\text{Card}(Sp(f)) = n$, la somme des dimensions des sous-espaces propres est ainsi égale à n. Puisque $\dim(E) = \text{Card}(\mathcal{B}) = 2n$, l'endomorphisme φ n'est donc pas diagonalisable.

EXERCICE 2

1. Fixons $x > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$.
   La fonction $t \mapsto (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On a donc deux problèmes à étudier.
   - En 0. On a $\left|(\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1}\right| \underset{t \to 0}{\sim} |\ln(t)|^k t^{x-1}$.
     Cherchons $\alpha < 1$ tel que $|\ln(t)|^k \, t^{x-1} = \underset{t\to 0}{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right) \iff t^{\alpha + x - 1}|\ln(t)|^k \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. C'est vérifié dès que $\alpha + x - 1 > 0$, i.e. $\alpha > 1 - x$ d'après les croissances comparées.
     Prenons donc $\alpha = \frac{1+(1-x)}{2} = 1 - \frac{x}{2}$. Alors :
     $$\left|(\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1}\right| = \underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{t^{1-x/2}}\right).$$
     L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x/2}} dt$ étant convergente (Riemann), par critère de négligeabilité pour les fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est absolument convergente, donc convergente.
   - En $+\infty$. On a :
     $$t^2(\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(croissances comparées)} \Longrightarrow (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$
     L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ étant convergente (Riemann), par critère de négligeabilité pour les fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.
   - Par relation de Chasles sur les intégrales convergentes, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est bien convergente.
2. On sait que :
   $$\boxed{\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}.$$
   En dérivant membre à membre cette égalité (on a admis que la fonction Γ étant bien dérivable), on en déduit que :
   $$\forall x > 0,\ \Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x).$$
   D'où :
   $$\forall x > 0,\ \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \boxed{\frac{1}{x}}.$$
   Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\Psi(n+2) - \Psi(n) = \Psi(n+2) - \Psi(n+1) + \Psi(n+1) - \Psi(n) = \boxed{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}}.$$

3. Soit $x > 0$ fixé. Soit $(\varepsilon, A) \in]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon < A$.
   En posant $f : t \mapsto \ln(t)e^{-t/2}t^{(x-1)/2}$ et $g : t \mapsto e^{-t/2}t^{(x-1)/2}$, on a par positivité de l'intégrale sur le segment $[\varepsilon, A]$,
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \int_\varepsilon^A (f(t) + \lambda g(t))^2 dt \geqslant 0.$$
   D'où :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_\varepsilon^A f^2(t)dt + 2\left(\int_\varepsilon^A f(t)g(t)dt\right)\lambda + \left(\int_\varepsilon^A g^2(t)dt\right)\lambda^2 \geqslant 0.$$
   Puisque $\displaystyle\int_\varepsilon^A g^2(t)dt \neq 0$ (la fonction g est continue, positive, jamais nulle sur $[\varepsilon, A]$), l'expression précédente est un polynôme de degré 2 en λ de signe constant (positif), donc son discriminant est négatif. On en déduit que :
$$4\left(\int_\varepsilon^A f(t)g(t)dt\right)^2 - 4\left(\int_\varepsilon^A f^2(t)dt\right)\left(\int_\varepsilon^A g^2(t)dt\right) \leqslant 0.$$
   autrement dit :
$$\left(\int_\varepsilon^A \ln(t)e^{-t}t^{x-1}dt\right)^2 \leqslant \left(\int_\varepsilon^A \ln^2(t)e^{-t}t^{x-1}dt\right)\left(\int_\varepsilon^A e^{-t}t^{x-1}dt\right).$$
   En faisant tendre $\varepsilon \to 0$ dans l'inégalité, toutes les intégrales apparaissant étant bien convergentes d'après la question 1, on en déduit que :
$$\boxed{\left(\int_0^A \ln(t)e^{-t}t^{x-1}dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^A \ln^2(t)e^{-t}t^{x-1}dt\right)\left(\int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt\right)}.$$

4. De même, en faisant tendre $A \to +\infty$ dans l'inégalité, toutes les intégrales apparaissant étant bien convergentes d'après la question 1, on en déduit que :
$$\left(\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1}dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} \ln^2(t)e^{-t}t^{x-1}dt\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\right),$$
   autrement dit :
$$\boxed{(\Gamma'(x))^2 \leqslant \Gamma''(x)\Gamma(x)}.$$
   La fonction Ψ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant jamais. De plus, on a :
$$\forall x > 0, \; \Psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \geqslant 0.$$
   La fonction Ψ est donc croissante sur $]0, +\infty[$.

5. Soit $a \in]0,1[$.

(a) Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-a^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k+a}\right) \\
&= \frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{n}\left((\Psi(k-a+1)-\Psi(k-a)) - (\Psi(k+a+1)-\Psi(k+a))\right) \\
&= \frac{1}{2a}\left((\Psi(n-a+1)-\Psi(1-a)) - (\Psi(n+a+1)-\Psi(1+a))\right) \quad \text{(sommes télescopiques)} \\
&= \boxed{\frac{1}{2a}\left(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\right) - \frac{1}{2a}\left(\Psi(n+a+1)-\Psi(n-a+1)\right)}.
\end{aligned}$$

La fonction Ψ étant par ailleurs croissante, avec $0 < a < 1$, puisque $n \leqslant n+1-a \leqslant n+1+a \leqslant n+2$, on a :

$$\Psi(n) \leqslant \Psi(n+1-a) \leqslant \Psi(n+1+a) \leqslant \Psi(n+2).$$

D'où on en déduit bien l'encadrement :

$$\boxed{0 \leqslant \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leqslant \Psi(n+2) - \Psi(n)}.$$

(b) En utilisant la question 2, on a donc :

$$0 \leqslant \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

D'où par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} (\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a)) = 0$. On en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\right).$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2-a^2}$ est donc convergente, et on a :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\right)}.$$

PROBLÈME

Partie I

1. (a)

```
FUNCTION DUEL : INTEGER ;
    BEGIN
        IF random < 1/2
            THEN DUEL:=1
            ELSE DUEL:=0 ;
    END ;
```

(b)

```
FUNCTION TEST_VICTOIRE(a,b,c : INTEGER) : BOOLEAN ;
    BEGIN
        TEST_VICTOIRE := ((a=b)AND(b=c)) ;
    END ;
```

(c)

```
PROGRAM TOURNOI ;
VAR a,b,c,n : INTEGER ;
FUNCTION DUEL : INTEGER ;
    BEGIN IF random < 1/2 THEN DUEL:=1 ELSE DUEL:=0 ; END;
FUNCTION TEST_VICTOIRE(a,b,c : INTEGER) : BOOLEAN ;
    BEGIN TEST_VICTOIRE := ((a=b)AND(b=c)) ; END ;
BEGIN
    RANDOMIZE;
    a:= DUEL ;
    b:= a+DUEL ;
    c:= b+DUEL ;
    n:=3;
    WHILE TEST_VICTOIRE(a,b,c) <> TRUE
        DO
        BEGIN
        a:=b ; b:=c ; c:=c+DUEL ; n := n+1 ;
        END ;
    WRITELN('Le nombre de duels nécessaires a été de : ',n) ;
END.
```

2. Liste des gagnants possibles :

duel 1	0	1		
duel 2	0	1	2	
duel 3	0	1	2	3

E_1 et E_2 sont des événements certains. En effet, le premier "gagnant du tournoi" possible ne peut être désigné au minimum qu'à l'issue du duel 3. On a donc :

$$\boxed{P(E_1) = P(E_2) = 1}$$

De plus, l'événement E_3 a pour événement contraire $\overline{E_3}$ correspond au fait que le joueur 0 ou le joueur 1 gagne les trois premiers tournois. En notant O_k "le joueur A_0 gagne le duel k" et I_k "le joueur A_1 gagne le duel k", on a donc :

$$\begin{aligned} P(E_3) &= 1 - P(\overline{E_3}) = 1 - P(O_1 \cap O_2 \cap O_3) - P(I_1 \cap I_2 \cap I_3) \\ &= 1 - P(O_1)P_{O_1}(O_2)P_{O_1\cap O_2}(O_3) - P(I_1)P_{I_1}(I_2)P_{I_1\cap I_2}(I_3) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Remarquons qu'on a :

$$\frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = P(E_3)$$

3. Soit $n \geqslant 3$. Notons G_n l'événement "il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro n et le vainqueur du duel numéro n est le joueur A_n (et marque donc au duel n sa première victoire)". Notons H_n l'événement "il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro n et le vainqueur du duel numéro n est le joueur A_{n-1} (et marque donc au duel n sa seconde victoire)".
Alors $E_n = G_n \cup H_n$ avec $G_n \cap H_n = \emptyset$. D'où : $P(E_n) = P(G_n) + P(H_n)$.
De plus, $G_n = E_{n-1} \cap T_n$ où T_n : "le joueur A_n gagne le duel n".
Ainsi : $P(G_n) = P(E_{n-1})P_{E_{n-1}}(T_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1})$.
De même, $H_n = E_{n-2} \cap U_{n-1} \cap U_n$ où U_k : "le joueur A_{n-1} gagne le duel k".
Ainsi : $P(H_n) = P(E_{n-2})P_{E_{n-2}}(U_{n-1})P_{E_{n-2}\cap U_{n-1}}(U_n) = \frac{1}{4}P(E_{n-2})$.
On a donc finalement :

$$\boxed{P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2})}$$

4. La suite $(P(E_n))_{n\geqslant 1}$ est donc récurrente linéaire double, et a pour équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \iff 4x^2 - 2x - 1 = 0$. L'équation admet deux solutions réelles qui sont $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Il existe donc deux constantes λ et μ telles que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n}$$

Puisque $2 < \sqrt{5} < 3$, on a $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0}$$

5. Pour tout $n \geqslant 1$, si E_n est réalisé (le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n), alors le gagnant n'avait pas été désigné à l'issue des duels précédents, E_{n-1} est donc nécessairement réalisé. Ainsi :

$$\forall n \geqslant 1,\ E_n \subset E_{n-1}$$

La suite d'événements (E_n) étant décroissante, le Théorème de la Limite Monotone affirme que :

$$P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0$$

L'événement "on ne désignera jamais de gagnant au tournoi" est ainsi négligeable. Son événement contraire, "le tournoi désignera un vainqueur", est alors presque-sûr, de probabilité 1.

Partie II

1. Soit $n \geqslant N$ et soit $k \in [\![1, N-1]\!]$.
Si on suppose que l'événement $A_k^{(n)}$ est réalisé, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires ($k < N$), donc c'est exactement le joueur A_{n-k+1} qui a gagné les k derniers duels, et qui n'est pas gagnant du tournoi (puisque $k < N$). Le gagnant du tournoi a pu être désigné au préalable avant l'apparition de A_{n-k+1}, ou n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n.
Le fait que le gagnant du tournoi n'ait pas été désigné à l'issue du n-ième duel revient donc au fait que le gagnant du tournoi n'ait pas été désigné avant les duels gagnés par A_{n-k+1}, donc autrement dit à l'issue du duel $n-k$. Ainsi, sachant $A_k^{(n)}$, E_n est réalisé si et seulement si E_{n-k} est réalisé.
$$P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P_{A_k^{(n)}}(E_{n-k})$$
Or, E_{n-k} est indépendant de $A_k^{(n)}$ puisque ne dépendant que des résultats des $n-k$ premiers duels, alors que $A_k^{(n)}$ dépend uniquement de l'issue des k derniers duels. Ainsi :
$$P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k})$$

2. Notons plus généralement $A_k^{(n)}$ l'événement "à l'issue du n-ième duel, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires" pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, $(A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned} P(E_n) &= \sum_{k=1}^{n} P(E_n \cap A_k^{(n)}) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} P(E_n \cap A_k^{(n)}) \quad (\text{car si } k \geqslant N,\ E_n \cap A_k^{(n)} = \emptyset) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)}) P_{A_k^{(n)}}(E_n) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)}) P(E_{n-k}) \end{aligned}$$
Or, pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, l'événement $A_k^{(n)}$ est réalisé si et seulement si le joueur A_{n-k+1} remporte ses k premiers duels. Il a une probabilité p de remporter le duel $n-k+1$, puis une probabilité q de remporter les $k-1$ suivants, donc $P(A_k^{(n)}) = pq^{k-1}$ et ainsi :
$$\boxed{P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k})}$$

3. Comme il est nécessaire d'avoir au moins N duels successifs pour que le gagnant du tournoi ait été désigné, le gagnant peut être désigné au plus tôt à l'issue du N-ième duel. Ainsi, $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$ sont des événements certains. On a :
$$P(E_1) = P(E_2) = \cdots = P(E_{N-1}) = 1$$
On en déduit d'après la question précédente que :
$$P(E_N) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} = \sum_{k=1}^{N-1} (q^{k-1} - q^k) = \boxed{1 - q^{N-1}}$$

4. Soit $n \geqslant N$. D'après la question 2, on a :

$$\begin{aligned}
P(E_n) - P(E_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n+1-k})) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=0}^{N-2} pq^{k}P(E_{n-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=0}^{N-1} pq^{k}P(E_{n-k}) + pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) \\
&= pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) + \sum_{k=1}^{N-1} p(q^{k-1}-q^k)P(E_{n-k}) - pP(E_n) \\
&= pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) + \sum_{k=1}^{N-1} p^2q^{k-1}P(E_{n-k}) - pP(E_n) \\
&= pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) + p\left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - P(E_n)\right) \\
&= \boxed{pq^{N-1}P(E_{n-N+1})}
\end{aligned}$$

5. La fonction $x \mapsto Q(x)$ est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$. De plus, on a : $\forall x > 0,\ Q'(x) = \sum\limits_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}kx^{k-1} > 0$. La fonction Q est donc continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[Q(0), \lim\limits_{x\to+\infty} Q(x)[= [-1,+\infty[$. Puisque $0 \in [-1,+\infty[$, l'équation $Q(x) = 0$ admet donc bien une et une seule solution dans $[0,+\infty[$.

   Remarquons que $Q(1) = \sum\limits_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} - 1 = p\frac{1-q^{N-1}}{1-q} - 1 = -q^{N-1} < 0 = Q(r_N)$, donc par stricte croissance de Q sur $]0,+\infty[$, on a nécessairement $r_N > 1$.
   De plus, puisqu'on a établi que $\forall x > 1, Q'(x) > 0$, en particulier, $Q'(r_N) > 0$.

6. • Puisque $P(E_1) = 1$ et que $r_N > 1$, on a bien $r_N^{N-1} \geqslant 1$, donc : $P(E_1) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{1-N}$.
   • Soit $n \geqslant 1$. Supposons qu'on ait montré que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(E_k) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{k-N}$. Alors, d'après la question 2,

$$\begin{aligned}
P(E_n) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N} \\
&= \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}r_N^k = \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}(Q(r_N)+1) = \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}
\end{aligned}$$

   • Par récurrence forte, la propriété est bien vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

7. $r_N > 1$, donc $\left|\frac{1}{r_N}\right| < 1$. La série de terme général $\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ est donc convergente (série géométrique). Par critère de comparaisons pour les séries à termes positifs, la série de terme général $P(E_n)$ converge également.

De plus, pour tout $K \geqslant N$, on a :

$$\sum_{n=N}^{K} (P(E_n) - P(E_{n+1})) = pq^{N-1} \sum_{n=N}^{K} P(E_{n-N+1})$$

autrement dit (somme télescopique),

$$P(E_N) - P(E_{N-K+1}) = pq^{N-1} \sum_{n=1}^{K-N+1} P(E_n)$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{K-N+1} P(E_n) = \frac{1}{pq^{N-1}} (P(E_N) - P(E_{K-N+1}))$$

Enfin, puisque la série de terme général $P(E_n)$ converge, on a nécessairement $\lim\limits_{K \to +\infty} P(E_{K-N+1}) = 0$, d'où :

$$\lim_{K \to +\infty} \sum_{n=1}^{K-N+1} P(E_n) = \frac{1}{pq^{N-1}} P(E_N) = \frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}}$$

8. (a) Soit $n \geqslant 2$. L'événement $(E_{n-1} \cap \overline{E_n})$ est réalisé si et seulement si le vainqueur du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du $(n-1)$-ième duel, mais l'est à l'issue du n-ième duel. Cet événement est donc réalisé si et seulement si le vainqueur est proclamé lors du duel numéro n, i.e. si et seulement si $[X = n]$ est réalisé. On a donc :

$$E_{n-1} \cap \overline{E_n} = [X = n]$$

(b) Pour tout $K \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{K} kP(X=k) &= \sum_{k=2}^{K} kP(X=k) \quad (\text{car } [X=1] = \emptyset) \\
&= \sum_{k=2}^{K} kP(E_{k-1} \cap \overline{E_k}) \\
&= \sum_{k=2}^{K} k\,(P(E_{k-1}) - P(E_k)) \quad (\text{car } E_n \subset E_{n-1}) \\
&= \sum_{k=2}^{K} kP(E_{k-1}) - \sum_{k=2}^{K} kP(E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{K-1} (k+1)P(E_k) - \sum_{k=1}^{K} kP(E_k) \\
&= 2P(E_1) + \sum_{k=2}^{K-1} (k+1-k)P(E_k) - KP(E_K) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{K-1} P(E_k) - KP(E_K)
\end{aligned}$$

Or, $\forall K \geqslant 1,\ 0 \leqslant KP(E_K) \leqslant \frac{K}{r_N^{K-N}} \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées), on en déduit donc que :

$$\lim_{K\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} kP(X=k) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k)$$

La série de terme général $kP(X=k)$ converge donc (absolument), X admet bien une espérance et :

$$E(X) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k) = \boxed{1 + \frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}}$$

Partie III

1. Soit z un complexe tel que $Q(z)=0$. On a alors :
$$R(z) = (qz-1)Q(z) = 0$$
De plus, en dérivant la relation $(qX-1)Q(X) = R(X)$, on obtient que $R'(X) = qQ(X) + (qX-1)Q'(X)$, d'où :
$$R'(z) = qQ(z) + (qz-1)Q'(z) = 0$$
Or, on sait que $R(X) = 1 - X + pq^{N-1}X^N$, donc $R'(X) = -1 + Npq^{N-1}X^{N-1}$.
Puisque $R'(z) = 0$, on a nécessairement $Npq^{N-1}z^{N-1} = 1$, d'où $z^{N-1} = \frac{1}{Npq^{N-1}}$. Enfin, $R(z) = 0$, donc :
$$1 - z + pq^{N-1}z^N = 0 \Longrightarrow z = 1 + pq^{N-1}z^{N-1}z = 1 + \frac{1}{N}z \Longrightarrow z\left(1-\frac{1}{N}\right) = 1 \Longrightarrow z = \frac{N}{N-1} \in [0,+\infty[$$
Or, Q admet une unique racine réelle positive qui est R_N, et qui ne vérifie pas $Q'(R_N) = 0$.
Cela contredit la définition de z. Ainsi, Q ne peut pas admettre de racine multiple (complexe ou réelle).
2. (a) • Soient S et T deux polynômes de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :
$$\begin{aligned} f(\lambda S + T) &= \left((\lambda S+T)\left(\frac{1}{z_1}\right), \dots, (\lambda S+T)\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right)\right) \\ &= \lambda\left(S\left(\frac{1}{z_1}\right), \dots, S\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right)\right) + \left(T\left(\frac{1}{z_1}\right), \dots, T\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right)\right) \\ &= \lambda f(S) + f(T) \end{aligned}$$
Donc f est bien une application linéaire.
• Soit $S \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors $f(S) = 0$, i.e. $\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ S\left(\frac{1}{z_k}\right) = 0$. Ainsi, le polynôme S est de degré au plus $N-2$, et admet au moins $N-1$ racines complexes distinctes. Il est donc nul. On a donc $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$. L'application S est donc injective, et puisque $\dim(\mathbb{C}_{N-2}[X]) = \dim(\mathbb{C}^{N-1}) = N-1$, l'application S est même bijective : c'est un isomorphisme.
(b) La matrice de A dans les bases canoniques est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_1^2} & \cdots & \frac{1}{z_1^{N-2}} \\ 1 & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_2^2} & \cdots & \frac{1}{z_2^{N-2}} \\ 1 & \frac{1}{z_3} & \frac{1}{z_3^2} & \cdots & \frac{1}{z_3^{N-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{z_{N-1}} & \frac{1}{z_{N-1}^2} & \cdots & \frac{1}{z_{N-1}^{N-2}} \end{pmatrix}$$

et sa transposée est alors donnée par :

$$
{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_3} & \cdots & \frac{1}{Z_{N-1}} \\ \frac{1}{z_1^2} & \frac{1}{z_2^2} & \frac{1}{z_3^2} & \cdots & \frac{1}{Z_{N-1}^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{z_1^{N-2}} & \frac{1}{z_2^{N-2}} & \frac{1}{z_3^{N-2}} & \cdots & \frac{1}{Z_{N-1}^{N-2}} \end{pmatrix}
$$

(c) Puisque f est un isomorphisme, la matrice A est inversible. La matrice ${}^tA$ qui est de rang égal au rang de A, est également inversible. Pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{N-1,1}(\mathbb{C})$, il existe donc une unique matrice $X \in \mathcal{M}_{N-1,1}(\mathbb{C})$ telle que ${}^tAX = Y$. En particulier, pour $Y = \begin{pmatrix} P(E_1) \\ \vdots \\ P(E_{N-1}) \end{pmatrix}$, il existe un et un seul $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N-1,1}(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^tAX = Y$, i.e. solution du système $(\mathcal{S})$ proposé.

3. Pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k} &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} z_j^k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} (Q(z_j)+1) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} \\
&= u_n
\end{aligned}
$$

Les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(P(E_n))_{n\geqslant 1}$ coïncident sur $[\![1, N-1]\!]$ d'après 2(c), et vérifient la même relation de récurrence, donc sont égales. On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ P(E_n) = u_n}$$

RAPPORT

COMMENTAIRES GENERAUX

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 9,9 et un écart-type de 5,1, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1

1. Cette question s'est avérée discriminante. Un tiers des candidats s'est avéré incapable de justifier l'une des assertions proposées (on voyait fleurir souvent l'affirmation $E \subset \mathbb{R}$, etc.). Un tiers des candidats a très bien traité ces questions et un dernier tiers a donné des justifications partielles ($E \subset \text{Vect}\,(u_1, v_1, .., u_n, v_n)$ donc $\mathcal{B}$ est une famille génératrice, $E \subset \mathbb{R}$ sont les plus fréquentes).
2. La question est bien traitée par la majeure partie des candidats (plus de 75 %).
3. La question est bien traitée par la majeure partie des candidats (plus de 75 %).
4. Près des deux tiers des candidats donnent la bonne réponse.
5. La moitié des candidats donne une argumentation convenable même si le lien entre matrice et endomorphisme est oublié par certains candidats.
6. Cette question fut plus discriminante, si un petit tiers des candidats parvient à justifier la constance de g, seule la moitié d'entre eux parvient à conclure à la question.

7. La question étant une synthèse des résultats obtenus précédemment, seules les meilleures copies ont donné la réponse convenable (ou la réponse à une des deux questions).

EXERCICE 2

1. Moins de la moitié des copies fournit des éléments de réponses substantielles (convergence sur $[1,+\infty[$ essentiellement et des tentatives maladroites sur $]0,1]$), seuls 10 % des copies ont donné une réponse satisfaisante.
2. L'immense majorité des candidats a donné une réponse correcte aux deux premières questions et plus d'un tiers a répondu correctement aux trois questions.
3. Un quart des candidats a pu fournir un argumentaire convenable à cette question en explicitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales (ou en invoquant un produit scalaire sur un espace de fonctions continues) en oubliant parfois les problèmes de convergence de l'intégrale en 0. Seules les meilleures copies ont levé toutes les difficultés présentes.
4. Plus de la moitié des candidats a répondu correctement en oubliant parfois de faire tendre A vers $+\infty$.
5. (a) Un candidat sur six a traité complètement et convenablement cette question et un autre sixième des candidats n'a répondu qu'à une des deux questions (généralement l'encadrement).
   (b) La moitié des candidats a justifié l'une des deux questions (un partage équitable entre la convergence de la série et la somme de la série (sous réserve de la convergence)) la moitié de ceux-ci (soit un quart des candidats) a répondu correctement aux deux questions.

PROBLEME

PARTIE I : Etude d'un cas particulier.

La plupart des questions de cette partie ont été abordées par plus des trois quarts des candidats.

1. La majorité des candidats a abordé ces questions d'informatiques (plus des trois quarts). La première question est réussie par les trois quarts (avec couramment des erreurs de syntaxe du type « if a = b = c »), la seconde n'est correctement menée que par 40 % et la dernière par moins d'un candidat sur dix.
2. Une large majorité des candidats a bien répondu à cette question même si certains ont forcé le résultat pour obtenir la dernière égalité $P(E_3) = \ldots$ Si cette égalité est mentionnée par le sujet, c'est pour permettre aux candidats d'avoir un test de cohérence de leurs calculs précédents donc le correcteur attend une justification honnête et cohérente (au vu des calculs précédents du candidat).

3. Seuls les meilleurs candidats (environ 10 %) donnent une justification raisonnable (soit par des événements disjoints et du conditionnement, soit par un véritable système complet d'événements).
4. Les réponses sont convaincantes pour la majorité des candidats (60 %) même si certains ne justifient pas la valeur de la limite.
5. Un bon tiers des candidats donne une réponse satisfaisante avec l'utilisation adéquate de théorèmes du cours, ce qui était indispensable pour les correcteurs à cette question.

PARTIE II : Etude du cas général.

La plupart des questions de cette partie ont été abordées par 40 à 50% des candidats.

1. Près d'un tiers des candidats est parvenu à expliquer cette égalité en français (ce qui était l'attente des correcteurs).
2. Cette question n'est correctement réussie que par les meilleurs candidats même si près d'un candidat sur quatre devine l'origine de cette formule mais les explications sont partielles (système complet d'événements ou valeur de $P\left(A_k^{(n)}\right)$).
3. Généralement, les candidats sachant justifier la valeur des probabilités $P(E_1), .., P(E_{N-1})$ parviennent à justifier la valeur de $P(E_N)$. Malheureusement, ils représentent moins de 20% des candidats.
4. Cette question n'est réussie que par les meilleures copies.
5. Un quart des candidats justifie l'existence et l'unicité de r_N et la moitié d'entre eux répond correctement aux deux autres questions.
6. La question est très peu abordée et elle n'est réussie que par quelques dizaines de candidats.
7. La convergence est justifiée par une petite minorité de candidats (un quart) et seules les meilleures copies calculent la valeur de la somme de la série.
8. (a) Près d'un tiers des candidats justifie l'une des inclusions et 20% des candidats justifient l'égalité.
   (b) La question est très peu abordée et elle n'est réussie que par quelques dizaines de candidats.

PARTIE III : Calcul de $P(E_n)$.

Cette partie n'est abordée que par une faible minorité des candidats (moins de 25 %) sauf la première question qui est abordée par la moitié des candidats.

1. Si quasiment tous les candidats abordant cette question (45 %) répondent à la première partie de la question, seuls les meilleurs candidats parviennent à conclure.

2. Seules les meilleures copies (entre 5 et 10%) répondent aux questions 2.a et 2.b. Une minorité d'entre eux justifie la réponse à la question 2.c.
3. Une dizaine de candidats parvient à traiter cette question.